

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**

**Facultatea de Matematică și Informatică**

***GHID PENTRU ADMITERE LA***

***FACULTATEA DE MATEMATICĂ  
ȘI INFORMATICĂ***

$$G = \left\{ A_x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Probleme propuse

Probleme rezolvate

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Admiterea 2000 – 2008

**BUCUREȘTI**

**2009**

## ALGEBRĂ

### EXERCIIII REZOLVATE

1) Dacă  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$  să se calculeze  $z^n + \frac{1}{z^n}$ .

R. Avem  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ ,  $z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6}$ .

2) Dacă  $z_k \in \mathbb{C}$ ,  $|z_k| = \rho > 0$ ,  $k \in \overline{1, n}$  să se arate că

$$E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \dots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \dots z_n} \in \mathbb{R}$$

R.  $z_k \overline{z_k} = \rho^2$ . Calculăm  $\overline{E}$  și obținem  $\overline{E} = E$  și deci  $E \in \mathbb{R}$ .

3) Dacă  $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$  să se calculeze

$$E = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^5)$$

R.  $\alpha^3 = 1$  și apoi  $E = ((1 - \alpha)(1 - \alpha^2))^2 = 9$ .

4) Câte elemente are mulțimea  $\left\{ \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^m : \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^n, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$

R. Avem

$$\begin{aligned} x &= \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^m : \left( \cos \left( \frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{4} \right) \right)^n = \\ &= \cos(m+n) \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{(m+n)\pi}{4}. \text{ Mulțimea are 8 elemente.} \end{aligned}$$

5) Să se rezolve ecuația  $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$ .

$$\mathbf{R.} \left( \frac{x+i}{x-i} \right)^n = -1 \text{ și apoi}$$

$$\frac{x+i}{x-i} = \sqrt[n]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$\text{cu } k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ adică } x_k = \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

6) Să se calculeze termenii comuni ai progresiilor 4, 9, 14, ... și 7, 19, 31, ... .

$$\mathbf{R.} 5m+4=12n+7, m = \frac{10n+2n+5-2}{5} = 2n+1 + \frac{2}{5}(n-1)$$

$$n-1=5k \text{ și deci } m=12k+3 \text{ și } 5m+4=60k+19, k \in \mathbb{N} \text{ etc.}$$

$$7) \text{ Să se calculeze } \sum_{k=0}^n \frac{2^k + 3^k}{5^k}.$$

$$\mathbf{R.} S = \sum_{k=0}^n \left( \frac{2}{5} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left( \frac{3}{5} \right)^k = \frac{5}{3} \left( 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) + \frac{5}{2} \left( 1 - \left( \frac{3}{5} \right)^{n+1} \right).$$

8) Într-o progresie aritmetică  $s_k$  este suma primelor  $k$  termeni. Să se calculeze  $E = 3s_n - 3s_{2n} + s_{3n}$ .

$$\mathbf{R.} s_k = \frac{(2a_1 + r(k-1))^k}{2}, \quad E = 0.$$

9) Fie  $(a_n), n \geq 1$  o progresie geometrică. Să se arate că

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n a_{i+1}^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \right)^2.$$

**10)** Dacă într-o progresie aritmetică de numere naturale există un pătrat perfect să se arate că există o infinitate de pătrate perfecte.

**R.** Fie  $a_k = a^2$  și  $a_n = a_1 + r(n-1)$ . Avem  $a_n = a^2 + r(n-k)$ . Alegem  $n$  astfel ca  $n-k = 2am + rm^2$  și avem  $a_n = (a+rm)^2, n \in \mathbb{N}$ .

**11)** În progresia geometrică  $(a_n)_{n \geq 1}$  notăm  $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$ . Dacă  $P_n = P_{2n}$ , să se calculeze  $P_{3n}$ .

**R.** Avem  $a_1^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = a_1^{2n} q^{n(2n-1)}$  și deci  $a_1^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = 1$ . Rezultă  $P_{3n} = 1$ .

**12)** Să se calculeze  $a^{\frac{b}{c}} \cdot b^{\frac{c}{a}} \cdot c^{\frac{a}{b}}$ .

**R.** 1

**13)** Dacă  $a = \log_6 4 \cdot \log_8 12$ ,  $b = \frac{\log_3 8}{\log_{12} 6}$ . Să se calculeze  $b$  în funcție de  $a$ .

**R.**  $\log_2 3 = x$ . Avem  $a = \frac{2}{1+x} \cdot \frac{2+x}{3}$  și deci  $x = \frac{4-3a}{3a-4}$  și  $b = \frac{3}{x} \frac{(2+x)}{(1+x)}$  etc.

**14)** Să se rezolve ecuația  $9^x - 4^x - 5^x = 2\sqrt{20^x}$ .

**R.**  $9^x = \left(4^{\frac{x}{2}} + 5^{\frac{x}{2}}\right)^2$  și deci

$$4^{\frac{x}{2}} + 5^{\frac{x}{2}} = 9^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

**15)** Să se rezolve sistemul 
$$\begin{cases} x^{\log_2 x} + y^{\log_2 y} = 5 \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 2 \end{cases}.$$

**R.**  $x^{\log_2 x} = a$ ,  $y^{\log_2 y} = b$  și deci  $a + b = 5$ ,  $\log_2 a + \log_2 b = 2$ .

**16)** Să se rezolve ecuația  $(x^2 + 3x + 1)^{x+5} = 1$ .

**R.** a)  $x^2 + 3x + 1 = 1$ , b)  $x + 5 = 0$  și  $x^2 + 3x + 1 \neq 0$ ,  
c)  $x^2 + 3x + 1 = -1$  și  $x + 5$  par și deci  $x \in \{-3, 0, -5, -1\}$ .

**17)** Să se compare  $\log_2 3$  cu  $\log_3 8$ .

**R.**  $\log_3 8 = \frac{3}{\log_2 3}$  și deci  $\log_3 8 - \log_2 3 = \frac{3 - (\log_2 3)^2}{\log_2 3}$ . Din  $2^5 > 3^3$

rezultă  $\log_2 3 < \frac{5}{3} < \sqrt{3}$  și  $\log_3 8 > \log_2 3$ .

**18)** Fie  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$   
Să se rezolve ecuația  $f(\log_2 x) = 1$ .

**R.** Avem 
$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2\sqrt{x-1}, & x \in [1, 5) \\ 1, & x \in [5, 10] \\ 2\sqrt{x-1} - 5, & x \in (10, \infty) \end{cases}.$$

Soluția este  $[32, 1024]$ .

**19)** Câte numere de  $n$  cifre ( $n \geq 3$ ) au suma cifrelor 3 ?

**R.** Numerele sunt de forma 3 0...0, 1 00... 2... 0, 2 00... 1... 0.  
1 0... 1 0... 1 0... 0 în total  $1 + (n-1) + (n-1) + C_{n-1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$  numere.

**20)** Câte numere de  $n$  cifre ( $n \geq 3$ ) au produsul cifrelor 8 ?

**R.** Există numere cu cifra 8, celelalte cifre fiind 1 și numere cu cifrele 2 și 4 și numere în care apare de trei ori cifra 2. În total  $n + A_n^2 + C_n^3$  numere.

**21)** Să se determine cel mai mic număr  $n$  pentru care numerele de  $n$  cifre care conțin pe 9 sunt mai multe decât cele care nu îl conțin pe 9.

**R.** Avem  $9 \cdot 10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1} > 8 \cdot 9^{n-1}$ . Numărul  $n$  minim este 7.

**22)** Câte laturi are un poligon convex cu 1127 diagonale ?

**R.**  $C_n^2 - n = 1127$ ,  $n = 49$ .

**23)** Pentru ce numere  $n$  avem  $n! < C_{2n}^n$  ?

**R.**  $n \leq 6$ . Pentru  $n \geq 7$  se arată prin inducție că  $C_{2n}^n < n!$  adică  $(n!)^3 > (2n)!$

**24)** Care este numărul termenilor iraționali ai dezvoltării  $(\sqrt[5]{2} + \sqrt[7]{3})^{2003}$ .

**R.** 1947. Avem  $\sum_{k=0}^{2003} C_{2003}^k 2^{\frac{2003-k}{5}} \cdot 3^{\frac{k}{7}}$ , cu  $k = 7t$  și  $\frac{2003-k}{5} \in \mathbb{Z}$  și deci  $k = 35s - 7$  cu  $1 \leq s \leq 57$ .

**25)** Fie  $f = (X + 1)^n (X^2 + 1)^{n-1} (X^3 + 1)^{n-2} \dots (X^n + 1)^1$ .

**a)** Să se afle gradul lui  $f$ .

**b)** Să se determine numerele  $z \in \mathbb{C}$  cu  $|z| = 1$  și  $f(z) \in \mathbb{R}$ .

**R.**

a) Gradul este  $\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ .

b)  $f(\cos \alpha + i \sin \alpha) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = \frac{12k\pi}{n(n+1)(n+2)}, k \in \mathbb{Z}$ .

26) Să se calculeze  $S = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} C_n^k$ .

**R. Avem**

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1} ((1-1)^{n+1} + n+1 - 1).$$

27) Fie numerele naturale  $n \geq k$ . Calculând coeficientul lui  $X^k$  din polinomul

$$f = (1+X)^n + X(1+X)^{n-1} + X^2(1+X)^{n-2} + \dots + X^n$$

să se arate că  $C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + \dots + C_{n-k}^0 = C_{n+1}^k$ .

**R. Avem**

$$a_k = C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + \dots + C_{n-k}^0$$

și

$$f = \frac{(1+X)^n}{1 - \frac{X}{1+X}} \left( 1 - \frac{X^{n+1}}{(1+X)^{n+1}} \right) = (1+X)^{n+1} - X^{n+1}$$

și deci  $a_k = C_{n+1}^k$ .

28) Să se arate că numărul  $N = \frac{(3n)!}{6(n!)^3}$  este întreg.

**R.**  $N = C_{3n-1}^{n-1} C_{2n-1}^{n-1}$ .

29) Să se determine  $f \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  dacă  $|f(1+i)| = 1$  și  $f$  are toate rădăcinile reale.

**R.** Avem

$f = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$  și deci  $|f(1+i)| = \prod_{k=1}^n |1 - x_k + i| = \prod_{k=1}^n \sqrt{(1-x_k)^2 + 1} = 1$  și  
deci  $(1-x_k)^2 = 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}$ .

**30)** Să se afle  $a$  și  $b$  dacă  $f = 2X^4 + 3X^3 + aX^2 - 1$ ,  
 $g = 2X^2 + X - b$  și  $g$  divide  $f$ .

**R.** Împărțim și găsim restul  $\frac{(b-a+1)}{2}X + \frac{b(a+b-1)}{2} - 1 = 0$  și  
deci  $a = 2, b = 1$  sau  $a = 1, b = -1$ .

**31)** Să se determine  $a$  și  $b$  dacă rădăcinile ecuației  
 $x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b = 0$  sunt în progresie aritmetică.

**R.** Fie  $\alpha - 3r, \alpha - r, \alpha + r, \alpha + 3r$  rădăcinile.

Avem  $4\alpha = 8$  și  $2\alpha(\alpha^2 - r^2) + 2\alpha(\alpha^2 - 9r^2) = -8$  și apoi  
 $\alpha = 2, r = \pm 1$  și  $a = 14, b = -15$ .

**32)** Să se descompună în  $\mathbb{R}[X], f = X^8 + 5X^4 - 36$ .

**R.** Avem

$$\begin{aligned} f &= (X^4 - 4)(X^4 + 9) = (X^2 - 2)(X^2 + 2)((X^2 + 3)^2 - 6X^2) = \\ &= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 3 - \sqrt{3}X)(X^2 + 3 + \sqrt{3}X). \end{aligned}$$

**33)** Să se determine rădăcinile polinomului  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  
 $f = X^7 + 2X^5 - X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$  știind că  $x_1 = i$  este rădăcină  
dublă.

**R.** Cum  $f \in \mathbb{R}[X]$  rezultă că și  $x_2 = -i$  este rădăcină dublă și  $f$   
divide cu  $(X^2 + 1)^2$ . După împărțire găsim  $a = 1, b = -2, c = 0, d = -1$  și  
rădăcinile  $1$  și  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .



**34)** Să se determine  $a$  dacă ecuația  $x^3 - ax^2 + 6ax - 8(a+1) = 0$  are rădăcinile în progresie geometrică.

**R.**  $x_1 = \frac{\alpha}{q}, x_2 = \alpha, x_3 = \alpha q$ . Se scriu relațiile lui Viète.

**35)** Să se determine  $f \in \mathbb{Q}[X], f \neq 0$  de grad minim care admite rădăcina  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ .

**R.** Punem  $x = \sqrt{5} - \sqrt{2}$  și avem

$$x^2 = 7 - 2\sqrt{10} \Rightarrow 2\sqrt{10} = 7 - x^2 \Rightarrow 40 = 49 - 14x^2 + x^4$$

și deci

$$f = X^4 - 14X^2 + 9.$$

**36)** Se arată că dacă  $g = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{Q}[X]$  are rădăcina  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$  rezultă  $a = b = c = d = 0$ .

**37)** Dacă  $f = (X+1)^n + X^n + 1$  are rădăcinile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  să se calculeze  $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 - x_k}$ .

**R.** Notăm  $y_k = \frac{1}{2 - x_k}$ , punem  $Y = \frac{1}{2 - X}$  și eliminăm pe  $X$ .

Avem  $(3Y - 1)^n + (2Y - 1)^n + Y^n = 0$  adică

$$(3^n + 2^n + 1)Y^n - C_n^1(3^{n-1} + 2^{n-1})Y^{n-1} + \dots = 0.$$

$$S = \sum_{k=1}^n y_i = \frac{n(3^{n-1} + 2^{n-1})}{3^n + 2^n + 1}.$$

**38)** Fie  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^n + aX + b$ ,  $n \geq 3$ .

a) Pentru  $n = 2003$  să se determine  $a$  și  $b$  dacă restul împărțirii lui  $f$  la  $X^2 + X + 1$  este  $X + 2$ .

b) Să se determine  $n, a, b$  dacă  $s_2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ ,  $s_3 = \sum_{k=1}^n x_k^3 = 1$ .

**R.**

a) Fie  $\alpha$  cu  $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$  Avem  $\alpha^3 = 1$  și  $\alpha^{2003} = \alpha^2$ ;  $a = 2, b = 3$

b) Dacă  $n \geq 4$  rezultă contradicția  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ . Deci  $n = 3$  și apoi

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}.$$

**39)** Fie  $a, b, c, d$  numere reale nenegative date. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul

$$x + y + axy = b$$

$$y + z + ayz = c$$

$$x + z + axz = d$$

**R.**

Prin înmulțirea cu  $a$  a fiecărei ecuații și adunarea lor obținem :

$$(ax + 1)(ay + 1) = ab + 1$$

$$(ay + 1)(az + 1) = ac + 1$$

$$(az + 1)(ax + 1) = ad + 1$$

Cu notațiile

$$u = ax + 1 \quad A = ab + 1$$

$$v = ay + 1 \quad B = ac + 1$$

$$w = az + 1 \quad C = ad + 1$$

vom avea sistemul :

$$\left. \begin{aligned} uv &= A \\ vw &= B \\ wu &= C \end{aligned} \right\},$$

a cărui rezolvare se lasă în seama cititorului.

**40)** Fie  $z \in \mathbb{C}^*$  pentru care  $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{8}$ . Să se arate că  $z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $z \in \mathbb{R}$ .

**R.**

Fie  $r = |z|$ . Avem

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^2} \Leftrightarrow \bar{z}^2(z^3 + z + 1) = \\ &= z^2(\bar{z}^3 + \bar{z} + 1) \Leftrightarrow z^2\bar{z}^2(z - \bar{z}) - z\bar{z}(z - \bar{z}) - (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z - \bar{z})(r^4 - r^2 - 2\operatorname{Re} z) = 0, \end{aligned}$$

unde am avut în vedere că  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = r^2$  și că  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$

Însă  $r^4 - r^2 - 2\operatorname{Re} z \neq 0$  (deoarece ecuația de gradul al doilea  $x^2 - x - 2\operatorname{Re} z = 0$  are discriminantul  $1 + 8\operatorname{Re} z$  care este strict negativ).

Așadar,

$$z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

După cum se cunoaște, ultima afirmație echivalează cu  $z \in \mathbb{R}$ .

**41)** Fie  $z \in \mathbb{C}^*$  astfel încât  $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ . Atunci  $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$ .

**R.**

Avem

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Notând  $t = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ ,  $t \in [0, \infty)$ , obținem :

$$t^3 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^3 = \left|z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2 + 3t.$$

Prin urmare, obținem  $t^3 - 3t - 2 \leq 0$ , adică  $(t+1)^2(t-2) \leq 0$ , ceea ce înseamnă că  $t \in [0, 2]$ , de unde concluzia.

**42)** Fie  $z \in \mathbb{C}^*$  astfel încât  $\left|z^6 + \frac{1}{z^6}\right| \leq 2$ . Atunci  $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$ .

**R.**

Din  $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^3 = z^6 + \frac{1}{z^6} + 3\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$  obținem (ca mai sus)

$$\left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| \leq 2.$$

Dar

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2,$$

deci

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left|z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right| \leq \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| + 2 \leq 2 + 2 = 4.$$

Prin urmare

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2.$$

**43)** Să se arate că, dacă polinomul  $f \in \mathbb{C}[X]$ ,  $f(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ , are rădăcinile de modul 1, atunci și polinomul  $g(X) = |\alpha|X^2 + |\beta|X + |\gamma|$  are aceeași proprietate.

**R.**

Pentru  $\alpha = 0$ , polinomul are forma  $f = \beta X + \gamma$ ,  $\beta \neq 0$ , deci pentru rădăcina  $x$  a sa, avem  $|x| = \left|\frac{\gamma}{\beta}\right| = 1$ .

Polinomul  $g(X) = |\beta|X + |\gamma|$  are rădăcina  $x = -\frac{|\gamma|}{|\beta|}$  și deci  $|x| = \left|\frac{\gamma}{\beta}\right| = 1$ .

Pentru  $\alpha \neq 0$ ,  $f$  are rădăcinile de modul 1 dacă și numai dacă polinomul  $f_1(X) = X^2 + \frac{\beta}{\alpha}X + \frac{\gamma}{\alpha}$  are rădăcinile de modul 1.

Cu notațiile  $u = \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $v = \frac{\gamma}{\alpha}$ , avem  $f_1(X) = X^2 + uX + v$   
 $g_1(X) = X^2 + |u|X + |v|$ .

Fie  $x_1, x_2$  rădăcinile polinomului  $f_1$  și  $z_1, z_2$  rădăcinile polinomului  $g_1$ .

Cum  $x_1x_2 = v$ , avem  $|x_1x_2| = |v|$ , deci  $|v| = 1$ .

Deoarece  $x_1 + x_2 = u$ , rezultă  $|u| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2$ .

Așadar  $g_1(X) = X^2 + |u|X + 1$ , unde  $|u| \leq 2$ .

Pentru  $|u| = 2$ , avem  $g_1(X) = (X + 1)^2$ , deci  $z_1 = z_2 = -1$ , de unde  $|z_1| = |z_2| = 1$ ;

Pentru  $|u| < 2$ , avem  $\Delta = |u|^2 - 4 < 0$  și atunci

$$z_{1,2} = \frac{-|u| \pm i\sqrt{4 - |u|^2}}{2},$$

deci

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{|u|^2 + 4 - |u|^2}{4}} = 1.$$

**44)** Fie  $m, n \in \mathbb{N}^*$  și  $a(m, n) = \sqrt{n} \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} \right]$ .

**a)** Se cere forma lui  $n$ , astfel încât  $a(m, n) \in \mathbb{Q}(\mathbb{N})$ ;

**b)** Pentru  $m = 999$  se cere cel mai mic număr natural  $n$ , pentru care  $a(m, n)$  este rațional (natural).

**R.**

După amplificarea termenului general din suma de mai sus cu conjugata numitorului, obținem

$$a(m, n) = \sqrt{n} \left[ 1 - \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \right] = \sqrt{\frac{n}{m+1}}.$$

a) Prin urmare, forma lui  $n$ , pentru care  $a(m, n) \in \mathbb{Q}(\mathbb{N})$ , este  $n = (m+1)s^2$ , unde  $s \in \mathbb{Q}$ , ( $s \in \mathbb{N}$ ).

b) În acest caz,  $a(m, n) = a(999, n) = \sqrt{\frac{n}{m+1}} = \sqrt{\frac{n}{1000}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{n}{10}}.$

Ca atare, cel mai mic număr natural  $n$ , pentru care  $a(999, n) \in \mathbb{Q}$ , este 10, iar cel mai mic număr natural  $n$ , pentru care  $a(999, n) \in \mathbb{N}$ , este 1000.

**45)** Fie  $k \in \mathbb{N}^*$  și polinomul  $P_k(X) = X^{k-1} + X^{k-2} + \dots + X + 1$ .

Să se arate că, dacă  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(m, n) = 1$ , atunci polinomul  $P_m(X)P_n(X)$  divide polinomul  $P_{mn}(X)$ .

**R.**

Se știe că, dacă  $(m, n) = 1$ , atunci  $(X^n - 1, X^m - 1) = X - 1$ .

[Într-adevăr, fie  $z$  o rădăcină comună a polinoamelor  $X^n - 1$  și  $X^m - 1$ . Din  $(m, n) = 1 \Rightarrow$  există  $k, l \in \mathbb{Z}$  cu  $nl + mk = 1$ . Atunci  $z = z^{mk+nl} = (z^m)^k (z^n)^l = 1^k \cdot 1^l = 1$ ].

Putem scrie

$$X^n - 1 = P_n(X) \cdot (X - 1) \text{ și } X^m - 1 = P_m(X) \cdot (X - 1),$$

unde  $(P_n, P_m) = 1$ . De asemenea  $X^{mn} - 1 = P_{mn}(X)(X - 1)$ .

Cum  $X^{mn} - 1 = (X^n - 1)(X^{n(m-1)} + X^{n(m-2)} + \dots + 1)$ , de unde  $X^n - 1$  divide  $X^{mn} - 1$ , deci  $P_n$  divide  $P_{mn}$ . Analog,  $P_m$  divide  $P_{mn}$ .

Cum  $(P_n, P_m) = 1$ , rezultă că  $P_n \cdot P_m$  divide  $P_{mn}$ .

46) Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Să se arate că, pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ , avem

$$\sqrt[n]{|z|} \leq \sqrt[n]{|\operatorname{Re} z|} + \sqrt[n]{|\operatorname{Im} z|}.$$

**R.**

Fie  $z = x + iy$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Inegalitatea din enunț revine la

$$\sqrt[2n]{x^2 + y^2} \leq \sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}, \text{ care este echivalentă cu } x^2 + y^2 \leq \left( \sqrt[2n]{x^2} + \sqrt[2n]{y^2} \right)^{2n},$$

care la rândul ei este echivalentă cu

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + C_{2n}^1 \left( \sqrt[2n]{x^2} \right)^{2n-1} \cdot \sqrt[2n]{y^2} + \dots + y^2,$$

inegalitate ce este evidentă.





## ALGEBRĂ

### EXERCIIII PROPUSE

1) Se consideră expresia  $E(x) = \frac{x+3}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Să se determine :

a) toate numerele raționale  $x$  pentru care  $E(x)$  este număr întreg ;

b) toate numerele întregi  $x$  pentru care fracția este număr întreg.

2) Se consideră mulțimea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 4x + 3y = 1980\}$ .

Să se determine cardinalul mulțimii  $A$ .

3) Să se determine mulțimea  $\{10x + 3 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{12y + 7 \mid y \in \mathbb{N}\}$ .

4) Se consideră mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 11k_1 + 8, k_1 \in \mathbb{Z}\}$ ,

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k_2, k_2 \in \mathbb{Z}\}$  și  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 44k + 8, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Să se arate că  $A \cap B = C$ .

5) Să se determine numărul de elemente al mulțimii

$$M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n^2 + 3}{n^2 + n}, n \in \{1, 2, \dots, 50\} \right\}.$$

6) Să se determine toate mulțimile finite  $X \subseteq \mathbb{R}$  cu proprietatea :

$$\forall x \in X \Rightarrow x + |x| \in \mathbb{R}.$$

7) Fie  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  numere impare. Să se arate că

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid ax^2 + bx + c = 0\} = \emptyset.$$

8) Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Să se arate că, dacă  $a + b + 1 = 0$ ,  $a \neq b$ ,  $a, b \neq 1$  sau  $b = \frac{a^2}{4}$  și  $a > 4$ , mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + ax + b = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + bx + a = 0\}$  are trei elemente.

9) Să se determine rădăcinile ecuației  $x^2 + (m+9)x + m^2 - 12 = 0$ , știind că  $m \in \mathbb{R}$  este o rădăcină a ecuației date.

10) Să se determine valorile parametrului  $p \in \mathbb{Q}$  și rădăcinile  $x_1, x_2$  ale ecuației  $x^2 - (p+1)x + p^2 + \frac{1}{7} = 0$  știind că  $x_1 = 2x_2$ .

11) Să se rezolve ecuația de gradul doi cu coeficienți reali  $Px^2 - \Delta x + S = 0$ , știind că  $\Delta, S$  și  $P$  sunt respectiv discriminantul, suma și produsul rădăcinilor sale.

12) Fie  $a, b, c$  lungimile laturilor unui triunghi. Să se demonstreze că :

i) ecuația  $x^2 - 2a(b+c)x + 2(b-c)^2 - 1 = 0$  are rădăcini reale și distincte ;

ii) ecuația  $a^2x^2 - 2(b^2 - c^2)x + 2(b^2 + c^2) - a^2 = 0$  nu are rădăcini reale ;

iii) cel puțin una din ecuațiile  $x^2 - 2ax + 2bc = 0$ ,  $x^2 - 2bx + 2ac = 0$ ,  $x^2 - 2cx + 2ab = 0$  nu are rădăcini reale.

13) Fie  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Să se arate că :

i)  $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

ii)  $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$ .

Precizați când are loc egalitatea.

$$iii) \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2, \text{ dacă } a_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Când are loc egalitatea ?

**14)** Să se arate că oricare ar fi  $a, b, c > 0$  distincte, ecuația  $(a+b+c)x^2 - 6x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$  nu are rădăcini reale.

**15)** Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  cu  $a \neq 0, c \neq 0$  și  $x_1, x_2$  rădăcinile ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$ . Să se determine ecuația de gradul al doilea ale cărei rădăcini sunt  $y_1 = \frac{ax_1 + b}{bx_2 + c}, y_2 = \frac{ax_2 + b}{bx_1 + c}$ .

**16)** Se consideră ecuația  $x^2 - mx + 2 = 0$  ce are rădăcinile  $x_1, x_2$  ( $m \in \mathbb{R}$ ).

i) Arătați că

$$E = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{21}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

ii) Determinați  $m$  astfel încât  $E$  să aibă valoarea cea mai mică.

**17)** Fie  $p, q \in \mathbb{R}$  astfel încât  $p^2 - 4q > 0, p < 0$  și  $q < 0$ . Dacă  $x_1, x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 + px + q = 0$ , să se calculeze  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$  și  $\sqrt[8]{x_1} + \sqrt[8]{x_2}$ .

**18)** Fie  $x_1, x_2$  rădăcinile ecuației  $x^2 + ax + 1 = 0$  și  $x_3, x_4$  rădăcinile ecuației  $x^2 + bx + 1 = 0$ . Să se arate că

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = b^2 - a^2.$$

**19)** Dacă  $x_1, x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 - x - 1 = 0$ , să se calculeze :

$$i) E_1 = \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{x_1^2 - 3x_1 + 1} + \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{x_2^2 - 3x_2 + 1} ;$$

$$ii) E_2 = \frac{x_1^3 + 1}{x_1^3 + 2} + \frac{x_2^3 + 1}{x_2^3 + 2} .$$

**20)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , astfel încât ecuațiile  $2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$ ,  $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$  să aibă o rădăcină comună.

**21)** Dacă ecuațiile  $x^2 + ax + b = 0$  și  $x^2 + cx + d = 0$  au o rădăcină irațională comună și  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , arătați că  $a = c$  și  $b = d$ .

**22)** Să se determine numerele  $m$  și  $n$  astfel încât mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 - (3m-4)x - 6(m-1) = 0\} \cap \\ \cap \{x \in \mathbb{R} \mid (n-1)x^2 - (n-1)x + 6(n-2) = 0\}$$

să aibă două elemente.

**23)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (3m+1)x^2 + (3m+2)x + 2m+5 = 0\} \cup \\ \cup \{x \in \mathbb{R} \mid (2m+5)x^2 + (3m+2)x + 3m+1 = 0\}$$

să aibă trei elemente.

**24)** Să se determine valorile reale ale lui  $m$  astfel ca ecuația  $mx^2 - 2(m+1)x + 2m+5 = 0$  să aibă rădăcini mai mari ca  $-1$ .

**25)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel ca ecuația  $(2m-1)x^2 - 3x + 2m = 0$  să admită o rădăcină între 1 și 2, iar cealaltă rădăcină să fie mai mică decât 1.

26) Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x + 2y = 1$ , arătați că  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$ .

27) Dacă numerele reale  $x$  și  $y$  verifică relația  $x^2 + y^2 + 168 = 24x + 10y$ , atunci  $x \in [11, 13]$  și  $y \in [4, 6]$ .

28) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$-7 < \frac{x^2 + (m+1)x - 5}{x^2 - x + 1} < 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

29) Pentru ce valori ale lui  $m$ ,  $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m - 2 < 0$ , oricare ar fi  $x < 0$ ?

30) Să se determine valoarea minimă a expresiei  $\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ .

31) Să se determine valorile lui  $m$  pentru care trinomialul  $(2m+5)x^2 - 2(m+1)x + 1$  are un maxim mai mare decât 5.

32) Fie familia de funcții de gradul al doilea :

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

i) Să se arate că vârfurile parabolilor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă ;

ii) Să se arate că vârfurile parabolilor asociate funcțiilor  $f_m$  se găsesc sub dreapta  $y = \frac{5}{4}$ .

33) Fie funcția de gradul al doilea :

$$f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1, \quad m \neq 0.$$

Să se determine  $m$  astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcții să se găsească pe prima bisectoare.

**34)** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + |x - a|$  unde  $a \in \mathbb{R}$ .

*i)* Să se reprezinte grafic funcția  $f$ . Discuție ;

*ii)* Să se determine  $a$  astfel încât  $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ .

**35)** Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1 + |x| + |x - 1|$  și  $g(x) = x^2 - 2x + 2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Calculați  $f \circ g$  și  $g \circ f$ .

**36)** Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  date de  $f(x) = x^2 + x + 2$  și  $g(x) = x^2 - x + 2$ . Să se arate că nu există o funcție  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $(h \circ f)(x) + (h \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**37)** Să se rezolve următoarele sisteme :

$$i) \begin{cases} 2y - x^2 = 1 \\ 2z - y^2 = 1 \\ 2x - z^2 = 1 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 27xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 10xy \end{cases};$$

$$iii) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x^2 + xz + z^2 = 28 \\ y^2 + yz + z^2 = 19 \end{cases} \quad iv) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy + xz + yz = 3 \end{cases};$$

$$v) \begin{cases} x + y + z = 24 \\ xy = 48 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}; \quad vi) \begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4 \\ x + y + z^2 = 6 \\ xy + xz + yz = 5 \end{cases}.$$

**38)** Să se arate că  $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{2}$ .

**39)** Să se verifice egalitățile :

*i)*  $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$  ;

*ii)*  $\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}} + \sqrt[5]{41-29\sqrt{2}} = 2$

*iii)*  $\sqrt[6]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[6]{26-15\sqrt{3}} = 6$

**40)** Să se arate că  $x_0 = \sqrt[8]{7+4\sqrt{3}} + \sqrt[8]{7-4\sqrt{3}}$  este rădăcină a ecuației  $x^8 - 30x^4 + 40x^2 + 24 = 0$ .

**41)** Să se rezolve inecuațiile

*a)*  $\frac{x}{x-1} \geq x$  ;

*b)*  $\left| \frac{x}{x-1} \right| \geq x$  ;

*c)*  $\frac{x}{x-1} \geq |x|$  ;

*d)*  $\left| \frac{x}{x-1} \right| \geq |x|$ .

**42)** Fie  $P(X) = X^6 - X^3 + 1 \in \mathbb{R}[X]$  și fie  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  o rădăcină a lui  $P(X)$ . Să se demonstreze că :

*a)*  $P(\varepsilon^5) = 0$  ;

*b)*  $P(X) = (X - \varepsilon)(X - \varepsilon^5)(X - \varepsilon^7)(X - \varepsilon^{11})(X - \varepsilon^{13})(X - \varepsilon^{17})$  ;

*c)* Pentru orice număr natural  $m$  polinomul  $Q(X) = X^{9m} + X^9 + 1$  nu se divide cu  $P(X)$ .

**43)** Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

*a)* Să se calculeze  $A^2$  ;

- b)** Să se demonstreze că  $A^3 = 2 \cdot A$  ;  
**c)** Pentru fiecare număr natural  $n \geq 1$  să se determine numerele naturale  $x_n, y_n$  astfel încât  $A^n = x_n A^2 + y_n A$ .

**44)** Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ .

- a)** Să se calculeze matricea  $A + A^2$  ;  
**b)** Să se calculeze matricea  $A^3$  ;  
**c)** Dacă  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  este matricea nulă și  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matricea unitate,  $0, I \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ , să se arate că  $F = \{0, I, A, A^2\}$  este corp în raport cu adunarea și înmulțirea matricilor ;  
**d)** Să se demonstreze că orice corp  $K$  cu 4 elemente este izomorf cu corpul  $F$  de la punctul precedent.

**45)** Fie  $m \in \mathbb{R}$  și

$$A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 + (m+1)x + m - 1 = 0\} \cup \{(m-1)x^2 + mx + m - 1 = 0\}$$

- a)** Să se demonstreze că pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  mulțimea  $A_m$  are cel mult 4 elemente ;  
**b)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii  $A_m$  pentru  $m = 0, m = 1, m = 7$  ;  
**c)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât mulțimea  $A_m$  să aibă 4 elemente.

**46)** Să se rezolve inecuațiile :

- a)**  $\ln x > \ln |x-1|$  ;  
**b)**  $\ln \left| \frac{x+3}{x-1} \right| > \ln (x-1)$  ;  
**c)**  $\max \left( \ln |x|, \ln \left| \frac{x+3}{x-1} \right| \right) > \ln |x-1|$ .



**47)** Considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

**a)** Să se calculeze matricele  $A^2, A^3$  ;

**b)** Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  există numere naturale  $x_n, y_n$  astfel încât  $A^n = x_n A + y_n I_3$  (unde  $I_3 \in M_3(\mathbb{R})$  este matricea unitate) ;

**c)** Să se determine în funcție de  $n \in \mathbb{N}$  numerele naturale  $x_n, y_n$  de la punctul **b**).

**48)** Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Pe  $\mathbb{R}$  definim legea de compoziție  $*$  prin

$$x * y = axy + b(x + y) + c$$

**a)** Să se decidă dacă legea de compoziție  $*$  este asociativă pentru  $a = 2, c = 1, b = 4$  ;

**b)** Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru ca legea de compoziție  $*$  să fie asociativă.;

**c)** Să se decidă dacă legea de compoziție  $*$  are element neutru pentru  $a = 2, c = 1, b = 4$  ;

**d)** Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru ca legea de compoziție  $*$  să aibă element neutru.

**49)**

**a)** Să se rezolve ecuația

$$|x^2 + x - 1| = x, \quad x \in \mathbb{R} ;$$

**b)** Să se demonstreze că pentru orice  $m \in \mathbb{R}$ , ecuația  $|x^2 + x - 1| = mx$  are exact două soluții reale.

**50)** Fie  $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ .

**a)** Dacă restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $X - 1$  este 2 și restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $X + 1$  este 3 să se determine restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $X^2 - 1$  ;

**b)** Dacă restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $(X-1)^2$  este  $X+1$  și restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $(X+1)^2$  este  $X-1$  să se determine restul împărțirii lui  $P(X)$  la  $(X^2-1)^2$ .

**51)** Fie  $\varepsilon = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  și  $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**a)** Să se calculeze matricele  $A^2$  și  $(I_3 + A)^2$  ;

**b)** Să se calculeze în funcție de  $n \in \mathbb{N}$  matricele  $A^n$  și  $(I_2 + A)^n$  ;

**c)** Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$(I_3 + A)^n = I_3 + 341A$$

( $I_3$  este matricea unitate din  $M_3(\mathbb{C})$ ).

**52)** Pentru  $a, b \in \mathbb{R}$  notăm

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

**a)** Să se calculeze în funcție de  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  matricea  $M(a, b) \cdot M(c, d)$  ;

**b)** Să se demonstreze că

$$G = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

este grup în raport cu înmulțirea matricilor. Să se precizeze care este elementul unitate al acestui grup ;

**c)** Să se demonstreze că

$$H = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

și

$$K = \{M(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

sunt monoizi în raport cu înmulțirea matricelor și să se determine elementele inversabile ale acestor monoizi.

**53)** Fie  $a \in \mathbb{R}$ . Se consideră inecuația

$$\left| \frac{x-a}{x-1} \right| > x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Să se rezolve inecuația pentru  $a = 0$  ;  
 b) Să se rezolve inecuația pentru  $a = 1$  ;  
 c) Să se discute și să se rezolve inecuația în funcție de parametrul  $a \in \mathbb{R}$ .

**54)** Să se rezolve ecuațiile :

a)  $\log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16)$  ;

b)  $\log_4(x-1)^2 = \log_2(x^2 - x - 16)$ .

**55)** Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

- a) Să se calculeze  $A^2$  și  $A^3$  ;  
 b) Să se calculeze în funcție de  $n \in \mathbb{N}$  matricea  $A^n$  ;  
 c) Să se calculeze în funcție de  $n \in \mathbb{N}$  matricea  $(I_2 + A)^n$  ( $I_2$  este matricea unitate din  $M_2(\mathbb{R})$ ).

**56)** Pe  $\mathbb{Z}$  se consideră legile de compoziție  $*$  și  $\circ$  definite prin

$$x * y = x + y + 1,$$

$$x \circ y = x + y - 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Să se arate că  $(\mathbb{Z}, *)$  și  $(\mathbb{Z}, \circ)$  sunt grupuri ;  
 b) Să se construiască izomorfism de grupuri.

$$f : (\mathbb{Z}, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, +),$$

$$g : (\mathbb{Z}, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}, +),$$

$$h : (\mathbb{Z}, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, \circ).$$

**57)**

a) Fie  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ .

Să se demonstreze că  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$  dacă și numai dacă  $x_1 = x_2 = x_3$ .

**b)** Fie  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$ . Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

dacă și numai dacă  $x_1 = x_2 = x_3$  ;

**c)** Fie  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  și  $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = rx \\ bx + cy + az = ry \\ cx + ay + bz = rz \end{cases}$$

**58)** Să se rezolve inecuațiile :

**a)**  $\sqrt{x+1} > x-1$  ;

**b)**  $\sqrt{x+1} > |x-1|$  ;

**c)**  $\sqrt{(x+1)} > |x-1|$ .

**59)**

**a)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$(m+1)x^2 + 2(m+1)x + m > 0$$

pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  ;

**b)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$(m+1)x^2 + 2(m+1)x + m > 0$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  ,  $x > 0$  ;

**c)** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$(m+1)x^2 + 2(m+1)x + m > 0$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  ,  $x > 1$ .

**60)** Fie  $G$  un grup cu proprietatea  $x^2 = 1$  pentru orice  $x \in G$ .

**a)** Să se demonstreze că  $G$  este abelian ;

**b)** Pentru orice subgrup  $H$  al lui  $G$  notăm

$$xH = \{xh \mid h \in H\}.$$

Să se demonstreze că  $H \cup xH$  este subgrup al lui  $G$ .

c) Dacă  $G$  este grup finit să se arate că ordinul lui  $G$  este o putere a lui 2.

**61)** să se rezolve inecuațiile :

a)  $x^2 + 2x > x^3$  ;

b)  $|x^2 + 2x| > x^3$  ;

c)  $x^2 + 2x > |x|^3$ .

**62)** Fie  $n \in \mathbb{N}$  ,  $n \geq 1$ .

a) Demonstrați că

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n ;$$

b) Determinați în funcție de  $n$ , cel mai mare număr natural  $k$  astfel încât  $2k \leq n$  și demonstrați că

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^k = 2^{n-1} ;$$

c) Determinați în funcție de  $n$ , cel mai mare număr natural  $k$  astfel încât  $4k \leq n$  și demonstrați că

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + \dots + C_n^k = \frac{1}{2} \left( 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \right) ;$$

d) Demonstrați că

$$1 + X + \dots + X^{n-1} = (X-1)^{n-1} + C_n^1 (X-1)^{n-2} + C_n^2 (X-1)^{n-3} + \dots + C_n^{n-2} (X-1) + n.$$

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

## EXERCIIII REZOLVATE

1) Fie  $a$  un număr strict pozitiv și  $f:[0,a] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Să se arate că există

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

și să se calculeze această limită.

### Soluție

Deoarece  $f$  este continuă, aplicăm teorema de medie și găsim pentru orice  $0 < x < a$  câte un număr  $0 \leq c(x) \leq x$  cu proprietatea că

$$\int_0^x f(t) dt = f(c(x)) \cdot (x - 0) = x \cdot f(c(x))$$

deci

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(c(x))$$

Fie acum un șir  $(x_n)_n$  format cu numere  $0 < x_n < a$  așa ca  $\lim_n x_n = 0$ .

Avem pentru orice  $n$

$$\frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} f(t) dt = f(c(x_n)).$$

Rezultă că  $\lim_n c(x_n) = 0$ , prin urmare  $\lim_n f(c(x_n)) = f(0)$  (deoarece  $f$  este continuă în 0).

Rezultă în final că

$$\lim_n \frac{1}{x_n} \int_0^{x_n} f(t) dt = \lim_n f(c(x_n)) = f(0)$$

deci  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0)$ .

2)

a) Să se arate că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  avem inegalitatea :

$$\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \leq 1$$

b) Să se demonstreze identitatea

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$$

pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

### Soluție

a) Avem de arătat că

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

ceea ce este echivalent cu (înmulțim cu  $1+x^2 > 0$ )

$$-1-x^2 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$

evident. Dacă  $x > 0$ , inegalitățile sunt stricte, deci  $\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| < 1$ .

b) Funcția  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(u) = \arccos u$ , este derivabilă pe  $(-1, 1)$  și  $\varphi'(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ .

Fie  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$  se poate scrie ca o compunere de funcții  $f = \varphi \circ h$  unde avem schema  $[0, \infty) \xrightarrow{h} [-1, 1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  (deci  $h$  este derivabilă) și  $\varphi$  a fost definită. Deoarece pentru  $x > 0$ ,  $-1 < h(x) < 1$ , rezultă, cu teorema de derivare a funcțiilor compuse că  $f$  este derivabilă.

Avem, pentru  $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2|x|} \cdot \frac{-4x}{1+x^2}\right) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Funcția  $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2 \operatorname{arctg} x$  este derivabilă și

$$g'(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Avem funcțiile continue  $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f'(x) = g'(x)$  pentru orice  $x > 0$ . Deci există o constantă reală  $C$  așa ca  $f(x) - g(x) = C$  pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

Din continuitate, prin trecere la limită în  $x = 0$ , avem de asemenea  $f(0) - g(0) = C$ .

Dar :

$$f(0) = \arccos 1 = 0$$

$$g(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(0) - g(0) = 0.$$

Deci  $C = 0$ .

Prin urmare,  $f(x) - g(x) = 0$ , pentru orice  $x \geq 0$ .

Așadar,  $f = g$

adică

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$$

pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

**Observație.** Putem obține  $C$  și luând valorile în  $x = 1$ .



3) Fie  $a$  un număr real,  $a \neq 0$ . Se consideră șirul  $(x_n)_n$  definit astfel :

$$x_n = \frac{\sqrt{(1-a)^2 n^4 + n^2 + 1}}{a n^2}$$

a) Să se arate că șirul  $(x_n)_n$  este convergent și să se calculeze  $\lim_n x_n$  ;

b) Pentru ce valori ale lui  $a$  avem  $\lim_n x_n = 2$  ?

**Soluție**

a) Avem, dacă  $a = 1$  :

$$x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n^2} = \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}}{n^2} = \frac{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{n^2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{n} \xrightarrow{n} 0.$$

Dacă  $a \neq 1$ , avem succesiv

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{(1-a)^2 n^4 \left[1 + \frac{1}{(1-a)^2 n^2} + \frac{1}{(1-a)^2 n^4}\right]}}{a n^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(1-a)^2} \cdot \sqrt{n^4} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(1-a)^2 n^2} + \frac{1}{(1-a)^2 n^4}}}{a n^2} = \\ &= \frac{|1-a| \cdot n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{(1-a)^2 n^2} + \frac{1}{(1-a)^2 n^4}}}{a n^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{|1-a|}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(1-a)^2 n^2} + \frac{1}{(1-a)^2 n^4}} \xrightarrow{n} \frac{|1-a|}{a}.$$

Deci, în toate cazurile :

$$\lim_n x_n = \frac{|1-a|}{a}.$$

**b)** Trebuie să avem

$$\frac{|1-a|}{a} = 2$$

adică  $|1-a| = 2a$ .

Dacă  $a \geq 1$ , revine la  $a-1 = 2a \Leftrightarrow a = -1$ , imposibil.

Dacă  $a < 1$ , revine la  $1-a = 2a \Leftrightarrow 3a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$ .

Unica soluție este  $a = \frac{1}{3}$ .

**4)** Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{daca } x = 0 \\ x^x & , \text{daca } x > 0 \end{cases}.$$

**a)** Să se arate că  $f$  este continuă ;

**b)** Să se arate că  $f$  este derivabilă pe  $(0, \infty)$  și să se calculeze  $f'(x)$  pentru  $x > 0$  ;

**c)** Să se arate că  $f$  nu este derivabilă în  $x = 0$ .

**Soluție**

**a)** Avem de studiat continuitatea lui  $f$  în 0 (în rest,  $f$  este banal continuă).

Avem, pentru orice  $x > 0$ ,  $\ln(f(x)) = x \ln x$ .

Atunci :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.\end{aligned}$$

(am folosit regula lui l'Hôpital ; se vor verifica ipotezele de aplicabilitate).

Atunci :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(f(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(f(x))} = e^0 = 1 = f(0).$$

**b)** Din nou, un procedeu asemănător.

Pentru  $x > 0$ , avem  $f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{x \ln x}$ , deci

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (1 + \ln x).$$

**c)** Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$  (cum am văzut), deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty.$$

Cu consecința teoremei creșterilor finite (deoarece  $f$  este continuă), avem

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$$

deci  $f$  nu este derivabilă în  $x = 0$ .

**5)** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , funcția definită astfel :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \text{daca } x < 0 \\ x^2 & , \text{daca } x \geq 0 \end{cases}.$$

**a)** Să se arate că  $f$  este derivabilă și să se calculeze funcția derivată  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ;

**b)** Să se arate că  $f$  este de două ori derivabilă pe  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  și nu este de două ori derivabilă în 0 ;

### Soluție

**a)** În orice punct  $x \neq 0$  avem

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{daca } x < 0 \\ 2x, & \text{daca } x > 0 \end{cases}.$$

Cu consecința teoremei creșterilor finite (deoarece  $f$  este continuă !...verificare...!) rezultă că

$$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} -2x = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0.$$

Deci există  $f'(0) = 0$ .

Avem deci derivată în orice punct  $x \in \mathbb{R}$ . “Formula” derivatei  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{daca } x < 0 \\ 2x, & \text{daca } x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\textbf{b)} \text{ Avem } f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{daca } x < 0 \\ 2, & \text{daca } x > 0 \end{cases}.$$

În punctul  $x = 0$ , vom aplica funcției continue  $h = f'$  consecința teoremei creșterilor finite.

$$h'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} h'(x) = \lim_{x \nearrow 0} f''(x) = -2$$

$$h'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} h'(x) = \lim_{x \searrow 0} f''(x) = 2.$$

Deci  $h$  nu este derivabilă în  $x=0$ , adică  $f'$  nu este derivabilă în  $x=0$ , prin urmare  $f$  nu este de două ori derivabilă în  $x=0$ .

6) Fie  $a > 0$ . Se definește șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  după cum urmează:

$$x_1 = \sqrt{a}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

- a) Să se scrie termenii  $x_1, x_2, x_3$ ;
- b) Să se arate că șirul este strict crescător;
- c) Să se arate că șirul  $(x_n)_n$  este mărginit;
- d) Să se calculeze  $\lim_n x_n$ .

#### Soluție

a)  $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$ .

b) Avem  $x_2 > x_1$  (evident v.1.)

Admitem că  $x_n > x_{n-1}$  și arătăm că de-aici rezultă că  $x_{n+1} > x_n$ . Cu pasul precedent va rezulta (inducție) că  $x_{p+1} > x_p$  pentru orice  $p$ , deci  $(x_n)_n$  este strict crescător

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a + x_{n-1}} = x_n$$

(folosind ipoteza  $x_{n-1} < x_n \Rightarrow a + x_{n-1} < a + x_n \Rightarrow \sqrt{a + x_{n-1}} < \sqrt{a + x_n}$  etc.).

c) Avem de arătat că există  $M > 0$  așa ca  $x_n < M$  pentru orice  $n$  (deoarece  $(x_n)_n$  este strict crescător).

“Ghicirea” marginii  $M$  se face astfel : dacă  $(x_n)_n$  este convergent, atunci limita sa  $l = \sup x_n$ .

Dar,  $l$  (despre care nu știm că există în  $\mathbb{R}$ !) ar trebui să satisfacă ecuația obținută prin trecere la limită în relația de recurență

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$$

adică

$$l = \sqrt{a+l} \Leftrightarrow l^2 = a+l \Leftrightarrow l^2 - l - a = 0.$$

Rădăcinile sunt

$$l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Soluția negativă nu este acceptabilă. Rămâne  $l = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ .

Prin inducție se arată că  $x_n < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ .

În adevăr :

$$\begin{aligned} x_1 = \sqrt{a} &< \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} < 1 + \sqrt{1+4a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4a < 1 + 1 + 4a + 2\sqrt{1+4a} \end{aligned}$$

evident.

Apoi, admitem că  $x_n < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ .

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} &< \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow a + x_n < \frac{1 + 1 + 4a + 2\sqrt{1+4a}}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_n < \frac{1 + 2a + \sqrt{1+4a}}{2} - a = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \end{aligned}$$

evident.

**d)** Din cele ce preced, rezultă  $\lim_n x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ .

**7)** Să se calculeze :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin x} dx$$

### Soluție

Avem  $|\sin x| \leq 1$ , deci  $2 + \sin x > 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și numitorul nu se anulează.

Se încearcă folosirea schimbării de variabilă standard

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

care nu poate fi folosită pentru  $x = \pi$ .

În consecință, vom proceda astfel :

$$a) \text{ Definim funcția } I : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(a) = \int_0^a \frac{1}{2 + \sin x} dx.$$

Vom calcula  $I(a)$ , pentru  $0 < a < \pi$ .

$$I(a) = \int_0^a \frac{1}{2 + \sin x} dx$$

se calculează cu schimbarea de variabilă

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{x}{2} = \arctg t \Rightarrow x = 2 \arctg t \quad (\text{v. intervalul !})$$

$$\Rightarrow dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Integrala devine

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{1+t^2}{2(t^2+t+1)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{1}{t^2+t+1} dt = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \Big|_o^{tg \frac{a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2tg \frac{a}{2} + 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2tg \frac{a}{2} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)
\end{aligned}$$

Deoarece  $\lim_{\substack{a \rightarrow \pi \\ a < \pi}} tg \frac{a}{2} = \infty$ , vom avea  $\lim_{\substack{a \rightarrow \pi \\ a < \pi}} \frac{2tg \frac{a}{2} + 1}{\sqrt{3}} = \infty$ , deci

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \pi \\ a < \pi}} \operatorname{arctg} \frac{2tg \frac{a}{2} + 1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{\substack{a \rightarrow \pi \\ a < \pi}} I(a) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

**b)** Avem : integrala cerută este  $I(\pi) = \lim_{\substack{a \rightarrow \pi \\ a < \pi}} I(a) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

**8)** Să se calculeze :

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx.$$

**Soluție**

**a)** Întâi facem împărțirea  $x^4 : (x^2 + 1)$ , adică

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & x^2 + 1 \\
-x^4 - x^2 & x^2 - 1 \\
\hline
& / - x^2 \\
& \underline{x^2 + 1} \\
& / \quad 1
\end{array}$$



Câtul este  $x^2 - 1$ , restul este 1, deci

$$x^4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 1,$$

deci

$$\frac{x^4}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

**b) Rezultă**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx &= \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 + \arctg x \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} + \arctg 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Observație.** Referitor la prima parte, puteam scrie

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{x^2 + 1} &= \frac{x^4 + x^2 - x^2}{x^2 + 1} = x^2 + \frac{-x^2}{x^2 + 1} = x^2 + \frac{-x^2 - 1 + 1}{x^2 + 1} = \\ &= x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \text{ etc.} \end{aligned}$$

**9) Să se reprezinte grafic funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită astfel:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|1 - x^2|}{x} & , \text{daca } x \neq 0 \\ 0 & , \text{daca } x = 0 \end{cases}$$

**Soluție**

Avem  $f(-x) = -f(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Este suficient să desenăm graficul pe  $[0, \infty)$ , graficul fiind *simetric* în raport cu punctul O (0, 0).

Fie deci restricția  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = f(x)$  (deci  $\varphi = f|_{[0, \infty)}$ ).

Avem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \text{daca } x = 0 \\ \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x & , \text{daca } 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x} & , \text{daca } x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ . Dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x - \frac{1}{x}\right) - x\right] = 0.$$

Prin urmare, dreapta  $y = x$  este asimptotă oblică la  $\infty$  (ea va fi asimptotă oblică și la  $-\infty$ , din motive de simetrie).

$$\varphi'(x) = -1 - \frac{1}{x^2} < 0 \text{ pe } (0, 1). \text{ Avem } \lim_{x \nearrow 1} \varphi'(x) = -2.$$

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ pe } (1, \infty). \text{ Avem } \lim_{x \searrow 1} \varphi'(x) = 2.$$

Deoarece  $\varphi$  este continuă, folosim consecința teoremei creșterilor finite și  $\varphi'_s(1) = -2$ ,  $\varphi'_d(1) = 2$ .

Așadar, punctul  $(1, f(1)) = (1, 0)$  este punct unghiular pentru grafic.

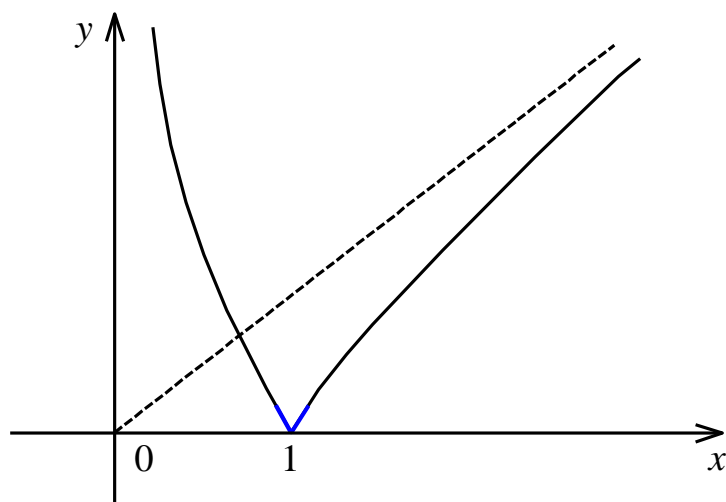
Derivata secundă:  $\varphi''(x) = \frac{2}{x^3}$ , dacă  $0 < x < 1$  și  $\varphi''(x) = -\frac{2}{x^3}$ , dacă  $x > 1$ .

Tabel de variație

$x$	0	1	$\infty$
$f'(x)$		-2/2	+
$f(x)$	0	0	

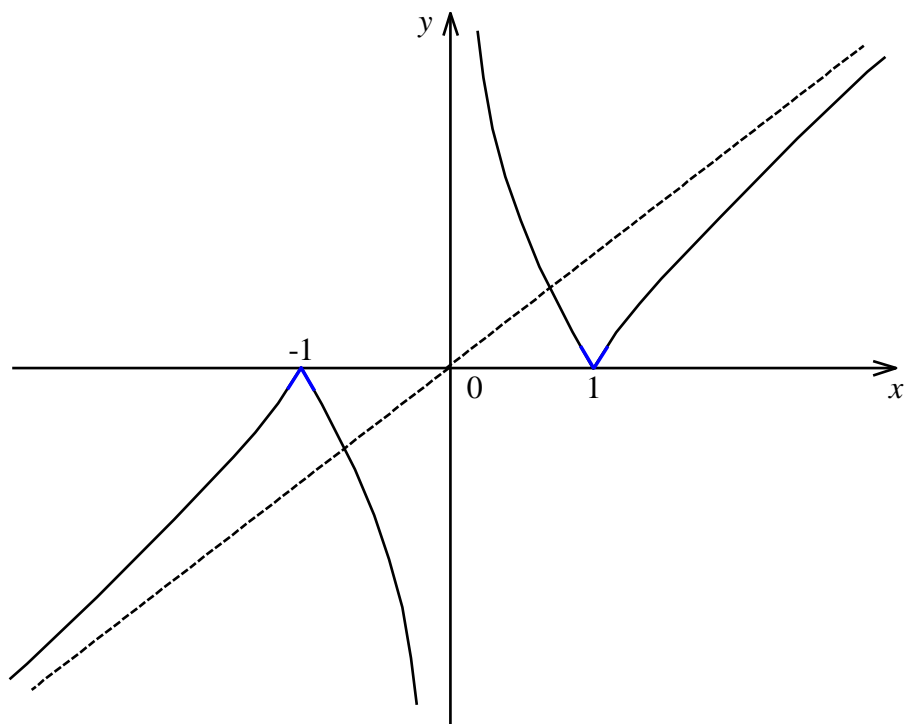
$f''(x)$		+		-
----------	--	---	--	---

Punctul  $O(0, 0)$  este *punct izolat al graficului* lui  $\varphi$ , și prezentat mai jos:



În punctul unghiular  $(1, 0)$  avem punct unghiular cu semitangente de pantă  $-2$  (la stânga) și pantă  $2$  (la dreapta). Asimptota este reprezentată punctat.

Prin simetrie, graficul lui  $f$  este următorul:



**10)** Fie  $a > 0$ . Se consideră funcția  $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin :

$$f(x) = \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^a.$$

Să se arate că există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  și să se calculeze această limită.

**Soluție.**

Pentru orice  $x > a$ , avem

$$\frac{x+a}{x-a} = \frac{x-a+2a}{x-a} = 1 + \frac{2a}{x-a},$$

deci

$$f(x) = \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^x = \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}.$$

Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{x-a} = 0$  și deci există  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}} = e$ .

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{x-a} = 2a$$

rezultă că există

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{2a}.$$

**11)** Se consideră funcția  $f : (0,1) \cup (1,2) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin :

$$f(x) = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Să se arate că există  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  și să se calculeze această limită.

**Soluție.**

Funcția este corect definită, deoarece pe  $D = (0,1) \cup (1,2)$  avem :

$$x-1 \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{\pi x}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ deci } \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \in (0, \infty).$$

Limita este de tipul  $1^\infty$ .

Pentru  $x \in D$  avem

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = 1 + \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) = 1 + \frac{\sin \left( \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \frac{\pi x}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{\sin \left( \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \frac{\pi x}{4}} \cdot \sqrt{2}.$$

$$\text{Apoi } \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(x-1) \in \left( -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \setminus \{0\}$$

deci

$$\sin \left( \frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \neq 0$$

pentru  $x \in D$ .

Putem deci scrie, pentru  $x \in D$  :

$$f(x) = \left( \left( 1 + \frac{\sin \frac{\pi}{4}(x-1)}{\cos \frac{\pi x}{4}} \cdot \sqrt{2} \right)^{\frac{\cos \frac{\pi x}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}(x-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^{\frac{\sin \frac{\pi}{4}(x-1)}{\cos \frac{\pi x}{4}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{x-1}}.$$

Paranteza mare are limita egală cu  $e$  (când  $x \rightarrow 1$ ), deoarece  $\sin \frac{\pi}{4}(x-1) \rightarrow 0$ .

Apoi,

$$e(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{4}(x-1)}{\cos \frac{\pi x}{4}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}(x-1)}{\frac{\pi}{4}(x-1)} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{4}}.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{4}(x-1)}{\frac{\pi}{4}(x-1)} = 1$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow 1} e(x) = 1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

În final,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}.$

**12)** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție periodică. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente.

**a)** Funcția  $f$  este constantă ;

**b)** Există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ;

**Soluție.**

1)  $\Rightarrow$  2) este evident.

2)  $\Rightarrow$  1) . Fie  $T > 0$  o perioadă a lui  $f$ . Să presupunem prin absurd că  $f$  nu este constantă. Fie deci  $a, b$  în  $\mathbb{R}$  așa ca  $f(a) \neq f(b)$ .

Definim șirurile  $(x_n)_n$  și  $(y_n)_n$  după cum urmează :

$$x_n = a + nT$$

$$y_n = b + nT$$

deci  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = \infty$ .

Avem  $f(x_n) = f(a)$  pentru orice  $n$ , deci  $\lim_n f(x_n) = f(a)$ .

La fel  $\lim_n f(y_n) = f(b)$ .

Deci  $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$ , ceea ce este contradictoriu, deoarece există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

**13)** Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  și  $I_n(\alpha) = n^\alpha \int_1^n \frac{dx}{x^n + x}$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha)$ .

**Soluție.**

Avem

$$I_n(\alpha) = n^\alpha \int_1^n \frac{x^{n-2}}{x^{n-1}(x^{n-1}+1)} dx.$$

Dacă  $\varphi(x) = x^{n-1}$  avem  $\varphi' = (n-1)x^{n-2}$ , de unde, folosind formula de schimbare de variabilă, obținem :

$$\begin{aligned} I_n(\alpha) &= \frac{n^\alpha}{n-1} \int_1^n \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)(\varphi(x)+1)} dx = \frac{n^\alpha}{n-1} \left( \int_1^n \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx - \int_1^n \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)+1} dx \right) = \\ &= \frac{n^\alpha}{n-1} \left( \int_1^{n^{n-1}} \frac{dt}{t} - \int_1^{n^{n-1}} \frac{dt}{t+1} \right) = \frac{n^\alpha}{n-1} \left[ \ln t \Big|_1^{n^{n-1}} - \ln(t+1) \Big|_1^{n^{n-1}} \right] = \frac{n^\alpha}{n-1} \left( \ln \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}+1} + \ln 2 \right) \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} +\infty & , \text{daca } \alpha > 1 \\ \ln 2 & , \text{daca } \alpha = 1. \\ 0 & , \text{daca } \alpha < 1 \end{cases}$$

**14)** Fie  $(a_n)_{n \geq 0}$ , un șir de numere reale, cu proprietatea că  $a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$ , definit prin  $b_n = (n+1)a_n - na_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este mărginit superior.

**Soluție.**

Avem  $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  de unde, prin înmulțirea cu  $n$ , obținem  $2na_n \leq na_{n-1} + na_{n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Prin urmare

$$\begin{aligned} 2a_1 &\leq a_0 + a_2 \\ 4a_2 &\leq 2a_1 + 2a_3 \\ 6a_3 &\leq 3a_2 + 3a_4 \\ &\vdots \\ 2na_n &\leq na_{n-1} + na_{n+1}. \end{aligned}$$

Însumarea acestor inegalități ne conduce la



$$(n+1)a_n \leq na_{n+1} + a_0$$

adică

$$(n+1)a_n - na_{n+1} \leq a_0.$$

Prin urmare

$$b_n \leq a_0,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , adică şirul  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este mărginit superior.

**15)** Fie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se calculeze  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta}$ .

**Soluție.**

Dacă  $\beta > 0$ , cum  $\lim_{x \searrow 0} x^\beta = 0$ , obținem  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta} = 1$ .

Dacă  $\beta = 0$ , cum  $x^\beta = 1$ , avem

$$\lim_{x \searrow 0} n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x = n^\alpha \left( \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} \right) = n^\alpha \cdot n = n^{\alpha+1}.$$

Dacă  $\beta < 0$ , cum  $\lim_{x \searrow 0} x^\beta = \infty$  avem următoarele cazuri :

1<sup>0</sup>)  $\alpha + 1 = 0$ . În acest caz avem de studiat  $\lim_{x \searrow 0} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta}$ . Suntem

în prezența unei nedeterminări de tipul  $1^\infty$ , deci vom studia

$$\lim_{x \searrow 0} x^\beta \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^x - 1 \right).$$

Avem

$$\lim_{x \searrow 0} x^\beta \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^x - 1 \right) = \lim_{x \searrow 0} x^{\beta+1} \sum_{k=1}^n \frac{k^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{n}.$$

Dar cum  $\lim_{x \searrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{k^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!)$ , deducem că :

i) pentru  $\beta + 1 = 0$  rezultă  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta} = e^{\ln \sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{n!}$  ;

ii) pentru  $\beta + 1 > 0$  rezultă  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta} = e^0 = 1$  ;

iii) pentru  $\beta + 1 < 0$  rezultă  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta} = +\infty$ .

2<sup>0</sup>)  $\alpha + 1 > 0$ . Atunci  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta} = \infty$ .

3<sup>0</sup>)  $\alpha + 1 < 0$ . Atunci  $\lim_{x \searrow 0} \left( n^\alpha \sum_{k=1}^n k^x \right)^{x^\beta} = 0$ .

**16)** Să se determine funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care există o funcție  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\sigma \in \mathbb{R}$  astfel ca  $f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} y^\sigma \varphi(xy)$ , pentru orice  $x > 0$ .

**Soluție.**

Fie  $f$  o funcție cu proprietatea cerută, iar  $\alpha = f(1)$ . Atunci  $\alpha = \lim_{y \rightarrow \infty} y^\sigma \varphi(y)$ . Avem

$$f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} y^\sigma \varphi(xy) = x^{-\sigma} \lim_{y \rightarrow \infty} (xy)^\sigma \varphi(xy) = x^{-\sigma} \cdot \alpha$$

Prin urmare  $f(x) = \alpha x^{-\sigma}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

Se verifică imediat că funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , date de  $f(x) = \alpha x^{-\sigma}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , verifică condițiile impuse, anume putem alege  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \alpha x^{-\sigma}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

17) Să se determine funcțiile derivabile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile:

a)  $f(0) = a, f'(0) = b$  și

b)  $\int_x^y f(t) dt = \frac{y-x}{2} (f(x) + f(y))$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Soluție.**

Derivând, în raport cu  $y$ , în relația de la **b**), obținem

$$f(y) = \frac{1}{2} (f(x) + f(y) + (y-x)f'(y)),$$

de unde

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(y), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $x=0$  avem

$$f(y) = f(0) + yf'(y), \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R}.$$

Vom avea  $f(y) = a + yf'(y)$ , pentru orice  $y \in \mathbb{R}$ .

Pentru  $y \neq 0$  putem scrie

$$\frac{yf'(y) - f(y)}{y^2} = -\frac{a}{y^2},$$

adică

$$\left( \frac{f(y)}{y} \right)' = a \cdot \left( \frac{1}{y} \right)'.$$

O consecință a teoremei lui Lagrange ne asigură că există constantele  $c_1$  și  $c_2$  astfel încât

$$\frac{f(y)}{y} = \begin{cases} \frac{a}{y} + c_1 & , \quad y < 0 \\ \frac{a}{y} + c_2 & , \quad y > 0 \end{cases}$$

adică

$$f(y) = \begin{cases} a + c_1 y & , \quad y < 0 \\ a + c_2 y & , \quad y > 0 \end{cases}.$$

Din derivabilitatea funcției  $f$  și din  $f'(0) = b$ , rezultă  $c_1 = c_2 = b$ ,  
deci  $f(y) = a + by$ , pentru orice  $y \in \mathbb{R}$ .

**18)** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  și

$$I_n(a) = \int_0^1 x^n (e^x + a) \cdot e^{e^x + ax} dx$$

**a)** Să se arate că șirul  $\{I_n(a)\}_{n \geq 1}$  este convergent ;

**b)** Să se demonstreze că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(a) = 0$ .

**Soluție.**

**a)**

Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $a \in \mathbb{R}_+$  avem :

$$I_{n+1}(a) - I_n(a) = \int_0^1 x^n (e^x + a) e^{e^x + ax} (x - 1) dx \leq 0,$$

deci  $I_{n+1}(a) \leq I_n(a)$  și prin urmare șirul  $(I_n(a))_{n \geq 1}$  este descrescător.

Evident,  $I_n(a) \geq 0$ . Obținem astfel că șirul din enunț este convergent.

**b)** Observăm că  $0 \leq x^n (e^x + a) e^{e^x + ax} \leq x^n (e + a) e^{e+a}$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ . De aici obținem  $0 \leq I_n(a) \leq \frac{1}{n+1} (e + a) \cdot e^{e+a}$  de unde, conform lemei "cleștelui", rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(a) = 0$ .

**19)** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**a)** Să se arate că

$$1 < \log_{n^2+3n+1} n(n+1)(n+2)(n+3) < 2 ;$$

**b)** Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \log_{n^2+3n+1} n(n+1)(n+2)(n+3) \right\},$$

unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .

**Soluție.**

a) Inegalitatea considerată este echivalentă cu următoarea :

$$n^2 + 3n + 1 < n(n+1)(n+2)(n+3) < (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Observând că

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1,$$

inegalitatea de mai sus este imediată.

b) Din a) rezultă că

$$\begin{aligned} \left\{ \log_{n^2+3n+1} n(n+1)(n+2)(n+3) \right\} &= \log_{n^2+3n+1} n(n+1)(n+2)(n+3) - 1 = \\ &= \log_{n^2+3n+1} \left[ (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 \right] - 1. \end{aligned}$$

Pentru calculul limitei date este suficient să calculăm :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[ \log_m (m^2 - 1) - 1 \right] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{m^2 - 1}{m}}{\ln m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln m + \ln \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)}{\ln m} = 1.$$

$$\text{Prin urmare, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_{n^2+3n+1} n(n+1)(n+2)(n+3) \right\} = 1.$$

$$20) \text{ Să se calculeze } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{1+x} dx.$$

**Soluție.**

Avem

$$n^2 \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{1+x} dx = \int_0^1 \left( x^{n^2} \right)' \cdot \frac{x}{1+x} dx = \frac{x^{n^2+1}}{1+x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{(1+x)^2} dx.$$

Cum

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n^2}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{n^2} dx = \frac{1}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

rezultă că limita cerută este  $\frac{1}{2}$ .

**21)** Să se arate că dacă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție periodică și neconstantă, atunci nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  și nu există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Soluție**

Fie  $T > 0$  o perioadă a funcției  $f$  și  $x_1, x_2 \in [0, T)$  astfel încât

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1 + nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1) = f(x_1)$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_2 + nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_2) = f(x_2).$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + nT) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_2 + nT) = \infty$$

și

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

conform teoremei de caracterizare a limitei unei funcții cu ajutorul șirurilor, deducem că nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

Similar se arată că nu există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**22)** Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  astfel încât

$$f(x+1) = 10f(x),$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \lg(f(x))) = 1.$$

**Soluție**

Prima relație din ipoteză se rescrie astfel

$$\frac{f(x+1)}{10^{x+1}} = \frac{f(x)}{10^x},$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , deci funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ , dată de

$$g(x) = \frac{f(x)}{10^x},$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , este periodică, de perioadă 1.

Cea de a doua parte a ipotezei ne asigură că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lg(g(x)) = -1,$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{1}{10}.$$

Prin urmare, folosind problema anterioară, deducem că funcția  $g$  este constant egală cu  $\frac{1}{10}$ , de unde

$$f(x) = 10^{x-1},$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**23)** Fie,  $k \geq 2$  fixat. Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un șir de numere reale pozitive astfel încât

$$x_{n+1}^k \leq kx_n + 1 - k,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și să se afle limita sa.

### Soluție

Conform ipotezei avem

$$x_{n+1} \leq \sqrt[k]{(kx_n + 1 - k) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1},$$

$k-1$  ori

de unde, conform inegalității mediilor, obținem

$$x_{n+1} \leq \frac{kx_n + 1 - k + k - 1}{k} = x_n,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este descrescător și mărginit inferior de 0.

Prin urmare  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent.

Fie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = l \geq 0.$$

Prin trecere la limită în inegalitatea din ipoteză, obținem

$$l^k \leq kl + 1 - k,$$

i.e.

$$(l-1)(l^{k-1} + l^{k-2} + \dots + l + 1 - k) \leq 0.$$

Dacă  $l > 1$ , atunci vom obține contradicția

$$l^{k-1} + l^{k-2} + \dots + l + 1 \leq k < l^{k-1} + l^{k-2} + \dots + l + 1,$$

iar dacă  $l < 1$ , atunci vom obține contradicția

$$k \leq l^{k-1} + l^{k-2} + \dots + l + 1 < k.$$

Așadar

$$l = 1,$$

adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

**24)** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale astfel încât  $x_0 \in (0,1)$  și

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

### Soluție

Vom arăta, folosind metoda inducției matematice, că

$$x_n \in (0,1),$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Fie  $P(n): x_n \in (0,1)$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

$P(0)$  este adevărată conform ipotezei.

Dacă presupunem că  $P(n)$  este adevărată, atunci și  $P(n+1)$  este adevărată deoarece

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n(1 - x_n(1 - x_n))).$$

Prin urmare șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit.

Pe de altă parte, deoarece

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2(x_n^2 - x_n + 1) \leq 0,$$



pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător, deci convergent.

Fie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$$

Prin trecere la limită în relația de recurență din ipoteză obținem

$$l^2(l^2 - l + 1) = 0,$$

de unde  $l = 0$ , adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**25)** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un şir de numere reale astfel încât  $x_1 > 0$  și

$$x_{n+1} = \frac{nx_n}{n + x_n^2},$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Să se arate că şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent și să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

### Soluție

Se verifică imediat, folosind metoda inducției matematice, că

$$x_n > 0,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n + x_n^2} < 1,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , deducem că şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător și mărginit inferior, deci convergent.

Fie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

Pentru a calcula pe  $l$  vom folosi relația

$$x_n = \frac{nx_n}{n}$$

și vom aplica lema lui Stolz-Cesàro.

În acest scop formăm raportul

$$\frac{(n+1)x_{n+1} - nx_n}{(n+1) - n} = (n+1)x_{n+1} - (n+x_n^2)x_{n+1} = x_{n+1}(1-x_n^2)$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(1-x_n^2) = l(1-l^2),$$

conform lemei de mai sus amintite, avem

$$l = l(1-l^2),$$

de unde  $l = 0$ , adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**26)** Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  este continuă iar  $g$  este monotonă. Dacă  $f(x) = g(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Q}$ , să se arate că  $f \equiv g$ .

### Soluție

Fie  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Să considerăm șirurile de numere raționale  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  care au proprietatea că

$$x_n < \alpha < y_n,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha.$$

Putem presupune, fără pierderea generalității, că  $g$  este crescătoare.

Atunci avem

$$g(x_n) \leq g(\alpha) \leq g(y_n),$$

i.e., conform ipotezei,

$$f(x_n) \leq g(\alpha) \leq f(y_n) \quad (*)$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Cum  $f$  este continuă, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(\alpha)$$

de unde, conform lemei cleștelui, din obținem (\*),

$$f(\alpha) = g(\alpha).$$

Prin urmare

$$f \equiv g.$$

**27)** Să se calculeze:

$$\int \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx$$

**Soluție**

Avem

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx &= \int \frac{e^{-x} + \sin^2 x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx + \int \frac{(e^{-x} + \sin^2 x + 1)'}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx = \\ &= x + \ln(e^{-x} + \sin^2 x + 1) + C. \end{aligned}$$

**28)** Există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , care admit primitive și astfel ca, pentru o primitivă  $F$  a lui  $f$ , să avem,  $F(x)F(1-x) = F(x^2)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  ?

**Soluție**

Să presupunem, prin reducere la absurd, că există o astfel de funcție. Prin derivarea relației date în ipoteză, obținem

$$f(x)F(1-x) - f(1-x)F(x) = 2xf(x^2),$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Pentru  $x=0$ , avem

$$f(0)F(1) - f(1)F(0) = 0,$$

iar pentru  $x=1$  avem

$$f(1)F(0) - f(0)F(1) = 2f(1).$$

Ca atare, obținem contradicția  $f(1)=0$ .

**29)** Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{\frac{kx+(n-k)a}{n}}$$

unde  $a, x \in \mathbb{R}$ , cu  $a \neq x$ .

**Soluție**

Fie

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{\frac{kx+(n-k)a}{n}}.$$

Atunci

$$S_n = \frac{e^a}{n} + e^a \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}(x-a)},$$

deci, cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^a}{n} = 0$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{\frac{k}{n}(x-a)} = \int_0^1 e^{t(x-a)} dt = \frac{e^{x-a} - 1}{x-a},$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n e^{\frac{kx+(n-k)a}{n}} = e^a \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \frac{e^x - e^a}{x-a}.$$

**30)** Fie  $a \in [0,1]$ . Să se arate că nu există nici o funcție continuă  $f : [0,1] \rightarrow (0, \infty)$ , astfel încât

$$\int_0^1 f(x) dx = 1,$$

$$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = a$$

și

$$\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = a^2.$$

### Soluții

#### I. Avem

$$\int_0^1 (x-a)^2 \cdot f(x) dx = 0,$$

de unde, cum  $(Id_{[0,1]} - a)^2 \cdot f$  este continuă, avem

$$(Id_{[0,1]} - a)^2 \cdot f \equiv 0,$$

deci

$$f \equiv 0,$$

fapt care contrazice ipoteza.

#### II. Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz avem

$$a^2 = \left( \int_0^1 x f(x) dx \right)^2 = \left( \int_0^1 x \sqrt{f(x)} \sqrt{f(x)} dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^2 f(x) dx \cdot \int_0^1 f(x) dx = a^2 .$$

Așadar avem egalitate în integralitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, cea care implică proporționalitatea lui  $\sqrt{f}$  cu  $Id_{[0,1]} \cdot \sqrt{f}$ , fapt ce contrazice ipoteza.

**31)** Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

**Soluție**

Avem

$$\frac{\int_0^{n+1} (1 + \arctg^2 x) dx}{\int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx} = 1 + \frac{\int_n^{n+1} (1 + \arctg^2 x) dx}{\int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx},$$

de unde, conform teoremei de medie, există  $\zeta_n \in [n, n+1]$ , astfel încât

$$\frac{\int_0^{n+1} (1 + \arctg^2 x) dx}{\int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx} = 1 + \frac{1 + \arctg^2 \zeta_n}{\int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx}.$$

Deoarece

$$\int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx \geq \int_0^n 1 dx = n,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx = \infty.$$

Cum, pe de altă parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \arctg^2 \zeta_n) = 1 + \frac{\pi^2}{4},$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1 + \arctg^2 \zeta_n}{\int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx} = 1,$$

de unde, conform unui rezultat cunoscut,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n (1 + \arctg^2 x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

**32)** Fie  $f : [0,1] \rightarrow [0,1)$  o funcție continuă astfel încât

$$\int_0^1 f(x^n) dx \leq \int_0^1 f^n(x) dx,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Să se arate că  $f \equiv 0$ .

### **Soluție**

Deoarece  $f$  este continuă și  $[0,1]$  este interval compact, există

$$M = \sup_{x \in [0,1]} f(x) < 1.$$

Atunci

$$0 \leq \int_0^1 x^{n-1} f(x^n) dx \leq \int_0^1 f(x^n) dx \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq M^n,$$

de unde, cu schimbarea de variabilă  $y = x^n$ , obținem

$$0 \leq \frac{1}{n} \int_0^1 f(y) dy \leq M^n,$$

i.e.

$$0 \leq \int_0^1 f \leq nM^n,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nM^n = 0,$$

conform lemei cleștelui,

$$\int_0^1 f = 0$$

Deoarece  $f$  este continuă și pozitivă, deducem că  $f \equiv 0$ .

**33)** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Să se arate că dacă  $\int_0^a \sin^{2n+1}(\pi(t+x)) dt$

nu depinde de  $x$ , atunci există  $k \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $a = 2k$ .

**Soluție**

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată de

$$f(x) = \int_0^a \sin^{2n+1}(\pi(t+x)) dt$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Cu schimbarea de variabilă  $y = \pi(t+x)$  obținem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi x}^{\pi(a+x)} \sin^{2n+1}(y) dy,$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Deoarece  $f$  este constantă, deducem că  $f' = 0$ , adică

$$\sin^{2n+1}(\pi(a+x)) = \sin^{2n+1}(\pi x),$$

de unde

$$\sin(\pi(a+x)) = \sin(\pi x),$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Relația de mai sus se rescrie sub forma

$$2 \sin \frac{\pi a}{2} \cos \frac{2\pi x + \pi a}{2} = 0,$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , de unde

$$\sin \frac{\pi a}{2} = 0,$$

deci există  $k \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $a = 2k$ .

## ANALIZĂ MATEMATICĂ

### EXERCIIII PROPUSE

1) Se consideră şirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin

$$x_n = \int_0^1 x \cos \frac{x}{n} dx$$

a) Să se arate că  $x_n = n \sin \frac{1}{n} + n^2 \left( \cos \frac{1}{n} - 1 \right)$  ;

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ;

c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2x_n - 1) = 0$ .

2) Fie  $x_0 \in [-1, 1]$  şi  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  şirul definit prin

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} \sin x_n.$$

a) Să se arate că şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este monoton şi mărginit ;

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

3) Se consideră funcţia  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(t) = \sin t^2 + \frac{1}{2t^2} \cos t^2$$

a) Să se arate că funcţia  $f$  admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa ;

b) Să se arate că :

$$\left| \int_n^{n+1} \sin t^2 dt \right| \leq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$



4) Fie  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx, \quad n \geq 1$

a) Să se arate că  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$  ;

b) Să se calculeze  $I_3$  ;

c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

5) Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă.

a) Să se arate că  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$  ;

b) Să se calculeze  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

6) Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x$$

a) Să se studieze variația funcției  $f$  ;

b) Fie  $x_0 > 0$  și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șirul definit prin

$$x_{n+1} = x_n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}.$$

Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și să se calculeze limita sa.

7) Să se arate că

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{5n-1} \frac{1}{n+k} = \int_0^5 \frac{1}{1+x} \, dx$  ;

b)  $0 \leq \sum_{k=0}^{499} \frac{1}{100+k} - \ln 6 \leq \frac{5}{600}$  .

8) Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin

$$f(x) = \int_0^x s(s-1)\dots(s-n) ds$$

a) Să se calculeze  $\int_0^x s(s-1)(s-2) ds$  ;

b) Să se arate că dacă  $n$  este număr natural par, atunci  $f(n) = 0$  și  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

9) Fie  $c \in \mathbb{R}$ .

a) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (x \cos \ln x + x \sin \ln x) + c & , \text{daca } x \in (0, 1] , \\ c & , \text{daca } x = 0 . \end{cases}$$

b) Să se arate că funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \cos \ln x & , \text{daca } x \in (0, 1] , \\ 0 & , \text{daca } x = 0 , \end{cases}$$

nu admite primitive și are proprietatea lui Darboux.

10) Se consideră funcția

$$f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - e^x .$$

a) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare ;

b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  ;

c) Să se arate că există și este unic  $a > 1$  astfel încât  $\int_1^a \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^a}{a}$

11) Fie  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \int_0^x (|\cos t| \sin t + |\sin t| \cos t) dt$$

a) Să se calculeze  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (|\cos t| \sin t + |\sin t| \cos t) dt$  ;

b) Să se arate că funcția  $F$  este periodică.

12) Se consideră șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$x_n = \int_0^n \sin x \sin \frac{x}{2^2} \dots \sin \frac{x}{n^2} dx$$

a) Să se calculeze  $x_1$  și  $x_2$  ;

b) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k x_n = 0$  pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$ .

13) Să se calculeze

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \ln^2(x+1)}{x^3}$  ;

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^\alpha - \ln^\alpha(x+1)}{x^{\alpha+1}}$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ .

14) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ .

a) Să se arate că  $f$  este o bijecție ;

b) Să se calculeze  $(f^{-1})'(1)$  ;

c) Să se calculeze  $\int_5^{12} f^{-1}(y) dy$ .

15) Fie  $x_0 \in (0, 1)$  și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șirul definit prin

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2.$$

a) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  ;

b) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 1$ .

16) Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă Riemann și

$$x_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx$$

a) Să se arate că dacă  $f$  este continuă în zero, atunci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ;

b) Să se arate că dacă  $f$  este injectivă și continuă pe  $[0, 1]$ , atunci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este monoton.

17) Fie  $a > 0$ .

a) Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$\ln x - ax = 0$$

b) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \text{ dacă } x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} , \\ a \cdot x & , \text{ dacă } x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}^c . \end{cases}$$

18) Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă Riemann.

a) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ ;

b) Să se arate că dacă funcția  $f$  este continuă, atunci există  $\xi_n \in (0, 1)$  astfel încât

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{1}{n+1} f(\xi_n).$$

19) Se consideră șirurile  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $(y_n)_{n \geq 1}$  definite prin

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cos \frac{k}{n}, \quad y_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left( \sin \frac{k+1}{n} - \sin \frac{k}{n} \right).$$

Să se arate că :

**a)** Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 x \cos x \, dx$  ;

**b)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ .

**20)** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir crescător de numere reale pozitive. Să se arate că :

**a)**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent dacă și numai dacă șirul  $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent ;

**b)**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent dacă și numai dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  și  $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent. ( $\{x\}$  este partea fracționară a lui  $x$ ).

## GEOMETRIE

### PROBLEME REZOLVATE

1) Fie  $M$  un punct interior triunghiului echilateral  $ABC$  și  $MX, MY, MZ$  perpendicularele din  $M$  pe laturile  $BC, AC, AB$  respectiv, unde  $X \in BC, Y \in AC, Z \in AB$ . Arătați că au loc relațiile

- a)  $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = ZB^2 + XC^2 + YA^2$  ;  
 b)  $AZ + BX + CY = ZB + XC + YA$ .

#### Soluție

a) Aplicând teorema lui Pitagora avem

$$AZ^2 + BX^2 + CY^2 = (AM^2 - MZ^2) + (BM^2 - MX^2) + (CM^2 - MY^2)$$

și

$$ZB^2 + XC^2 + YA^2 = (BM^2 - MZ^2) + (CM^2 - MX^2) + (MA^2 - MY^2).$$

Evident cele două expresii sunt egale.

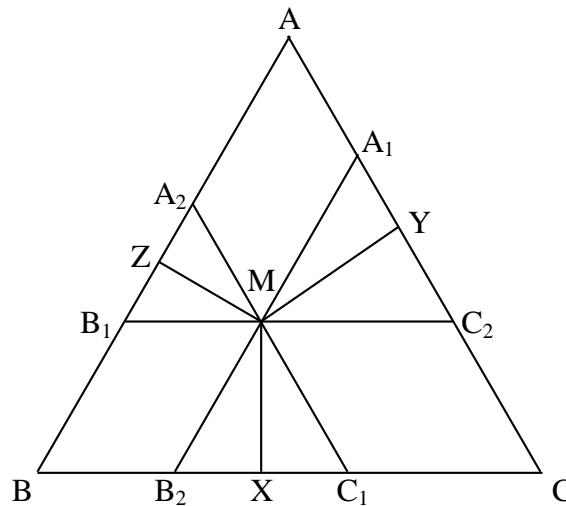


Fig. 4.1.

b) Construim prin  $M$  paralelele  $A_1B_2, B_1C_2$  și  $C_1A_2$  la dreptele  $AB, BC$  și  $CA$  respectiv (Fig. 4.1). Segmentele  $MX, MY$  și  $MZ$  sunt mediane în triunghiurile  $MB_2C_1, MA_1C_2$  și  $MA_2B_1$  respectiv și  $AA_1 = BB_2, BB_1 = CC_2, CC_1 = AA_2$ . Rezultă că

$$\begin{aligned} AZ + BX + CY &= AA_2 + A_2Z + BB_2 + B_2X + CC_2 + C_2Y = \\ &= CC_1 + ZB_1 + AA_1 + XC_1 + BB_1 + YA_1 = ZB + XC + YA. \end{aligned}$$

2) Fie  $AC$  diagonala cea mai mare a paralelogramului  $ABCD$ . Prin  $C$  se construiesc perpendicularele  $CE$  și  $CF$  pe dreptele  $AB$  și  $AD$  respectiv,  $E \in AB, F \in AD$ . Arătați că are loc relația

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

**Soluție**

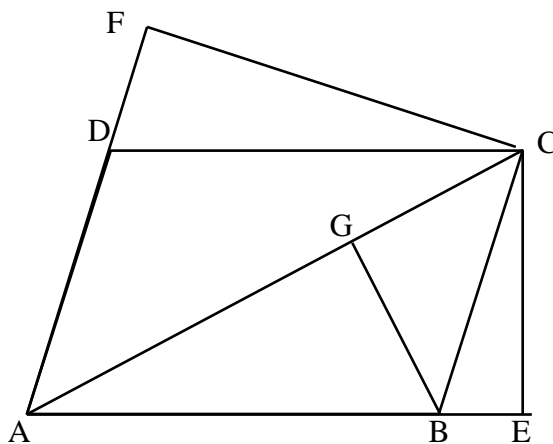


Fig.4.2.

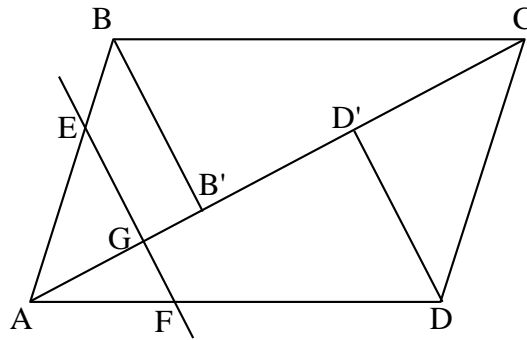
Construim prin  $B$  perpendiculara  $BG$  pe  $AC$  (Fig. 4.2.). Din asemănarea triunghiurilor  $ABG$  și  $ACE$  deducem  $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AG}$ , adică  $AC \cdot AG = AE \cdot AB$ . De asemenea, triunghiurile  $CBG$  și  $ACF$  sunt

asemenea și avem  $\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{CG}$ , adică  $AC \cdot CG = AF \cdot BC$ . Adunând membru cu membru egalitățile obținute deducem că

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC(AG + CG) = AC \cdot AC = AC^2.$$

**3)** O dreaptă intersectează laturile  $AB$  și  $AD$  ale paralelogramului  $ABCD$  în punctele  $E$  și  $F$  respectiv și diagonala  $AC$  în  $G$ . Arătați că are loc relația  $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$ .

**Soluție**



**Fig. 4.3.**

Fie  $B'$  și  $D'$  puncte pe diagonala  $AC$  astfel încât  $BB' \parallel EF$  și  $DD' \parallel EF$ . Atunci  $\frac{AB}{AE} = \frac{AB'}{AG}$  și  $\frac{AD}{AF} = \frac{AD'}{AG}$ . Observăm că triunghiurile  $ABB'$  și  $CDD'$  sunt congruente și avem deci  $AB' = CD'$ . Rezultă că

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AB'}{AG} + \frac{AD'}{AG} = \frac{CD' + AD'}{AG} = \frac{AC}{AG}.$$

**4)** Trei cercuri  $C_1, C_2, C_3$  sunt tangente exterior două câte două. Arătați că cele două drepte care trec prin punctul de tangență al cercurilor  $C_1$  și  $C_2$  și prin câte unul dintre celelalte două puncte de tangență, intersectează încă o dată cercul  $C_3$  în puncte diametral opuse.



### Soluție

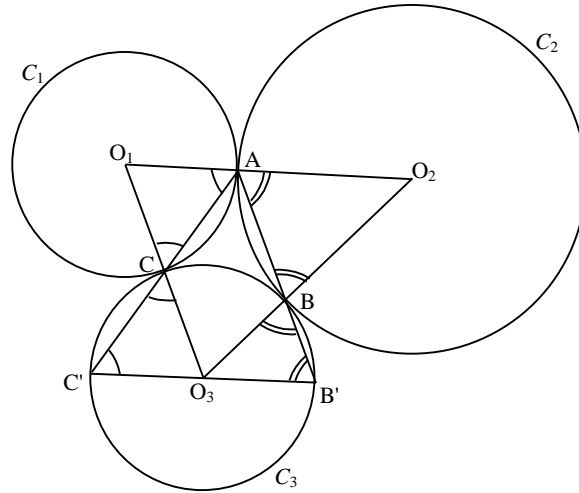


Fig. 4.4.

Fie  $O_1, O_2$  și  $O_3$  centrele cercurilor  $C_1, C_2$  și  $C_3$  respectiv. (Fig. 4.4.) și  $A, B, C$  punctele de tangență ale cercurilor  $C_1$  și  $C_2$ ,  $C_2$  și  $C_3$ ,  $C_3$  și  $C_1$  respectiv.

Atunci  $O_1A \parallel O_3C'$  deoarece  $m(\widehat{O_1AC}) = m(\widehat{O_3C'C})$  și  $O_2A \parallel O_3B'$  deoarece  $m(\widehat{O_2AB}) = m(\widehat{O_3B'B})$ . Deoarece punctele  $O_1, A, O_2$  sunt coliniare, rezultă că și punctele  $B', O_3, C'$  sunt coliniare, ceea ce înseamnă că  $B'$  și  $C'$  sunt puncte diametral opuse în cercul  $C_3$ .

5) Fie  $AB$  și  $CD$  două segmente oarecare și punctele  $M \in AB, N \in CD$  care împart segmentele  $AB$  și  $CD$  în același raport  $k$ .

Arătați că  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{BD}$ .

**Soluție**

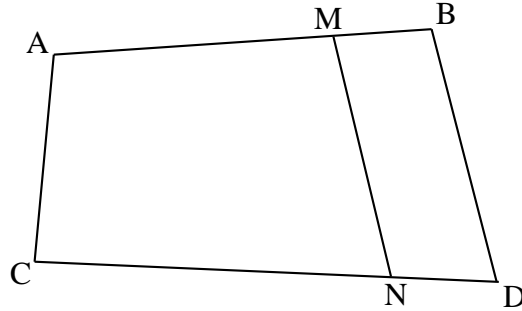


Fig. 4.5.

Din relațiile  $\overrightarrow{MA} = -k \cdot \overrightarrow{MB}$  și  $\overrightarrow{CN} = -k \cdot \overrightarrow{DN}$  deducem  $\overrightarrow{AB} = (k+1)\overrightarrow{MB}$  și respectiv  $\overrightarrow{CD} = (k+1)\overrightarrow{ND}$ . De asemenea, din relația  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = 0$  deducem  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$  și putem scrie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \frac{1}{k+1} \overrightarrow{CD} = \frac{1}{k+1} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BD} = \\ &= \frac{1}{k+1} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

6) Arătați că egalitatea  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$  este o condiție necesară și suficientă pentru ca segmentele  $AB$  și  $CD$  să fie perpendiculare.

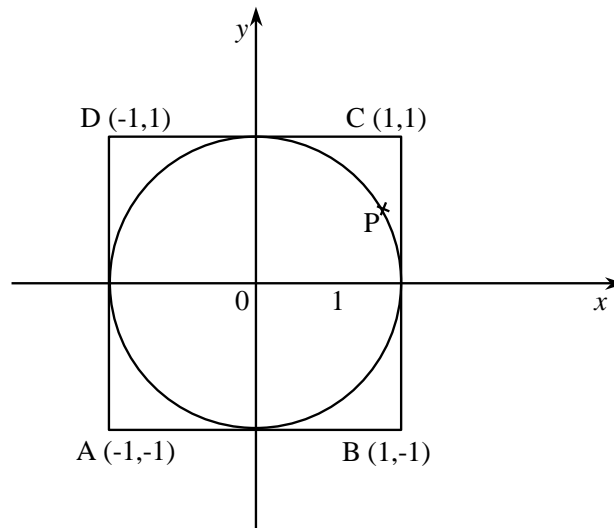
**Soluție**

Relația din enunț se mai poate scrie :

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) &= \overrightarrow{OD} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.\end{aligned}$$

7) Fie  $ABCD$  un pătrat circumscris unui cerc de rază 1 și  $a, b, c, d$  distanțele de la un punct oarecare  $P$  de pe cerc la vârfurile pătratului. Arătați că  $a^2c^2 + b^2d^2 = 10$ .

**Soluție**



**Fig. 4.7.**

Dacă  $x^2 + y^2 = 1$  este ecuația cercului  $C(0,1)$ , atunci

$$\begin{aligned}
 P(x_0, y_0) \in C(0,1) &\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1 \\
 a^2c^2 + b^2d^2 &= \left[ (x_0 + 1)^2 + (y_0 + 1)^2 \right] \left[ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 \right] + \\
 &\quad + \left[ (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 \right] \left[ (x_0 + 1)^2 + (y_0 - 1)^2 \right] = \\
 &= (2x_0 + 2y_0 + 3)(-2x_0 - 2y_0 + 3) + (-2x_0 + 2y_0 + 3)(2x_0 - 2y_0 + 3) = \\
 &= 9 - 4(x_0 + y_0)^2 + 9 - 4(x_0 - y_0)^2 = 18 - 8x_0y_0 - 4 + 8x_0y_0 - 4 = 10.
 \end{aligned}$$

8) Fie  $ABC$  un triunghi în care mediana din vârful  $B$  este împărțită de cercul înscris în triunghi în trei părți egale. Determinați raportul  $\frac{BC}{AB}$ .

### Soluție

Puterea punctului  $B$  față de cerc este  $BE^2 = x \cdot 2x$ , deci  $BE = x \cdot \sqrt{2}$ . Analog  $MF = x\sqrt{2}$ . Notăm  $y = AM = MC$  și deci  $AD = AF = y + x\sqrt{2}$ . Observăm că  $MC = BC$ , adică  $BC = y$ .

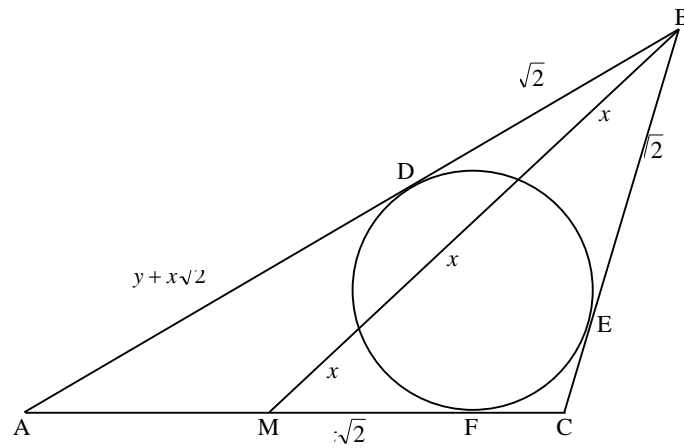


Fig.4.8.

Aplicăm teorema medianei

$$\begin{aligned}
 MB^2 &= \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} \Leftrightarrow 9x^2 = \frac{2[(y + 2\sqrt{2}x)^2 + y^2] - 4y^2}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 36x^2 + 4y^2 = 2[(y + 2\sqrt{2}x)^2 + y^2] \Leftrightarrow 18x^2 + 2y^2 = \\
 &= (y + 2\sqrt{2}x)^2 + y^2 \Leftrightarrow 18x^2 + 2y^2 = y^2 + 4\sqrt{2}xy + 8x^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 10x^2 = 4\sqrt{2}xy \Leftrightarrow 5x = 2\sqrt{2}y \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x = \frac{8}{5}y.
 \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\frac{BC}{AB} = \frac{y}{y + \frac{8}{5}y} = \frac{1}{1 + \frac{8}{5}} = \frac{5}{13}.$$

9) Fie  $ABC$  un triunghi oarecare și  $E$  un punct pe latura  $AC$  astfel încât segmentul  $BE$  împarte triunghiul  $ABC$  în două triunghiuri asemenea, raportul de asemănare fiind egal cu  $\sqrt{3}$ .

Să se determine unghiurile triunghiului  $ABC$ .

### Soluție

Triunghiurile  $ABE$  și  $BCE$  fiind asemenea au unghiurile două câte două congruente. Sunt posibile următoarele 6 cazuri în care  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6$ ,  $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6$ .

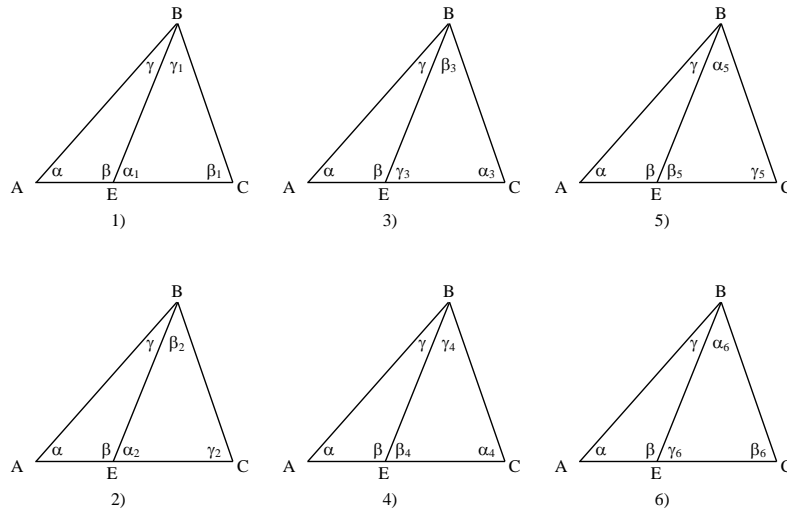


Fig. 4.9.a

În cazul

1)  $\Rightarrow AB \parallel EB$  căci  $\alpha = \alpha_1$  ;

2)  $\Rightarrow AB \parallel EB$  ;

3)  $\Rightarrow \gamma + \beta_3 = \beta + \gamma_3 = 180 \Rightarrow A, B, C$  coliniare ;

4)  $\Rightarrow \beta = \beta_4 = 90 \Rightarrow ABC$  isoscel și raportul de asemănare al triunghiurilor  $ABE, CBE$  este 1 ;

5) Este posibil numai cazul 5) în care  $\beta = \beta_5 = 90$  și

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 90 = \alpha_5 + \gamma_5 \\ \alpha = \alpha_5 \\ \gamma = \gamma_5 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma + \alpha_5 = 90.$$

6)  $\Rightarrow EB \parallel CB$  căci  $\beta = \beta_6$ .

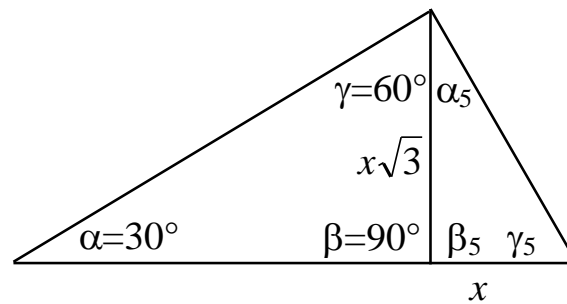


Fig. 4.9.b.

10) Determinați unghiurile unui triunghi știind că înălțimea, bisectoarea și mediana corespunzătoare unui vârf, împart unghiul în patru părți egale.

**Soluție**

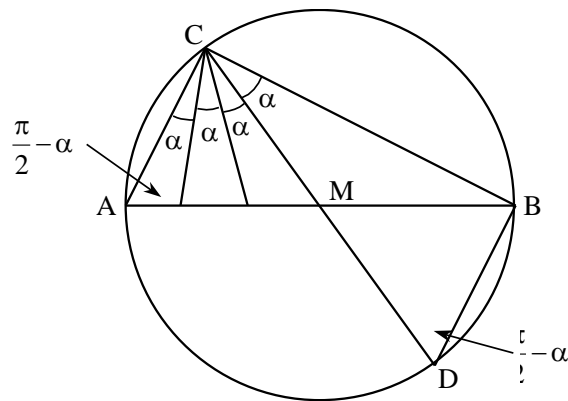


Fig. 4.10.

$\widehat{CAB} \equiv \widehat{CDB}$  deoarece subîntind arcul  $\widehat{BC}$ . Atunci  $\widehat{CBD}$  este unghi drept, deci  $CD$  este diametru. Deoarece diametrul  $CD$  trece prin mijlocul coardei  $AB$  și  $CD$  nu este perpendicular pe  $AB$  rezultă că și  $AB$  este diametru. Deci  $\widehat{C} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\pi}{8}$ .

11) Pe arcul mic  $\widehat{BC}$  al cercului circumscris triunghiului echilateral  $ABC$  se consideră un punct oarecare  $P$ . Fie  $Q = BC \cap AP$ . Arătați că  $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$ .

**Soluția a**

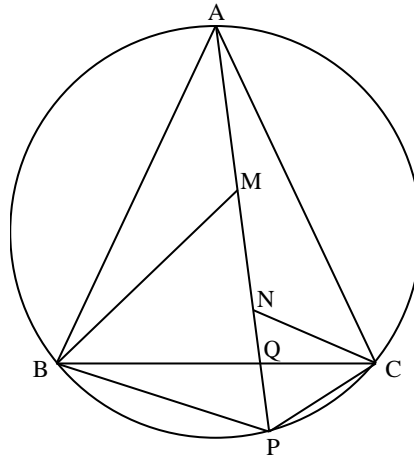
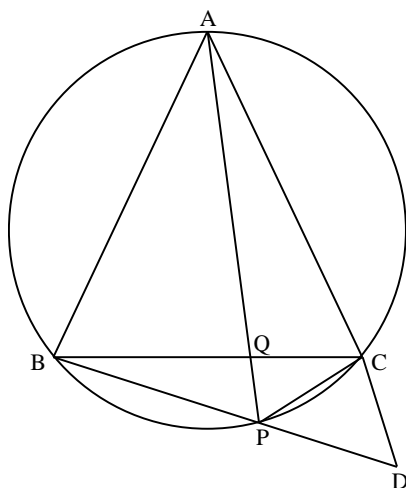


Fig. 4.11.a.

Construim  $M, N \in AP$  astfel încât  $PM = PB$  și  $PN = PC$ . Atunci triunghiurile  $PBM$  și  $PCN$  sunt echilaterale și  $PC \parallel BM$ ,  $PB \parallel CN$ . Avem  $\triangle QPC \sim \triangle QMB$  și  $\triangle QCN \sim \triangle QPB$ . Folosim una din asemănări:

$$\begin{aligned} \frac{PC}{BM} = \frac{PQ}{MQ} &\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PQ}{PB - PQ} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{PB - PQ}{PQ} = \frac{PB}{PQ} - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PB} \Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}. \end{aligned}$$

**Soluția b**



**Fig. 4.11.b.**

Construim  $D$  pe dreapta  $BP$  astfel încât  $PD = PC$ . Atunci  $\Delta PCD$  este echilateral și  $CD \parallel QP$ . Din  $\Delta BPQ \sim \Delta BDC$  rezultă

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{DB}{DC} = \frac{PB + PC}{PC} = \frac{PB}{PC} + 1 \Rightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{1}{PC} + \frac{1}{PB}.$$

**Soluția c**

$PQ$  este bisectoare în triunghiul  $PBC$  :

$$PQ = \frac{2}{\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}} \cdot \cos \frac{120^\circ}{2} = \frac{2}{\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}}.$$

**12)** Fie  $ABC$  un triunghi ascuțitunghic oarecare.

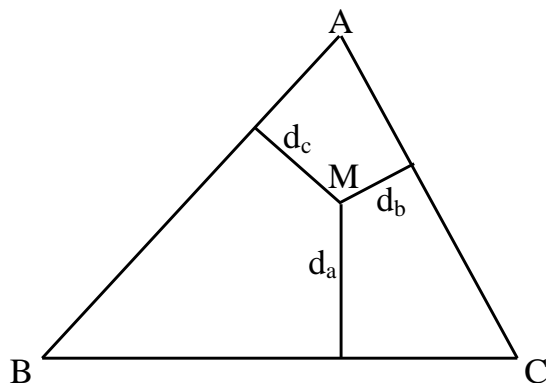
**a)** Pentru ce puncte  $M \in \text{Int } \Delta ABC$  expresia  $\frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c}$  este minimă ?

**b)** Pentru ce puncte  $M \in \text{Int } \Delta ABC$  expresia  $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$  este minimă ?

$d_a, d_b, d_c$  sunt distanțele de la punctul  $M$  la dreptele  $BC, CA, AB$  respectiv.



**Soluție**



**Fig.4.12.**

a) Avem

$$\frac{a \cdot d_a}{2} + \frac{b \cdot d_b}{2} + \frac{c \cdot d_c}{2} = \sigma[ABC] = \sigma \Rightarrow a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2\sigma$$

De asemenea

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} \right) (a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c) = \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + ab \left( \frac{d_a}{d_b} + \frac{d_b}{d_a} \right) + bc \left( \frac{d_b}{d_c} + \frac{d_c}{d_b} \right) + ac \left( \frac{d_a}{d_c} + \frac{d_c}{d_a} \right) \geq \\ & \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac, \end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} \geq \frac{1}{2\sigma} (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) = \text{const.}$$

Minimumul se atinge  $\Leftrightarrow d_a = d_b = d_c \Leftrightarrow M$  este centrul cercului înscris în  $\Delta ABC$ .

**b) Identitatea lui Lagrange**

$$(a^2 + b^2 + c^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = (a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c)^2 + \\ + (a \cdot d_b - b \cdot d_a)^2 + (b \cdot d_c - c \cdot d_b)^2 + (c \cdot d_a - a \cdot d_c)^2$$

ne dă

$$(a^2 + b^2 + c^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = (2\sigma)^2 + \\ + (a \cdot d_b - b \cdot d_a)^2 + (b \cdot d_c - c \cdot d_b)^2 + (c \cdot d_a - a \cdot d_c)^2$$

de unde rezultă că

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \min \Leftrightarrow a \cdot d_b - b \cdot d_a = 0, b \cdot d_c - c \cdot d_b = 0, \\ c \cdot d_a - a \cdot d_c = 0 \Leftrightarrow \frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c} \Leftrightarrow M$$

este punctul lui Lemoine (punctul de intersecție al simedianelor, simediană = simetrica medianei față de bisectoare).

**13)** Dintre toate triunghiurile de perimetru constant, cel de arie maximă este triunghiul echilateral.

**Soluție**

$\sigma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  este maximă  $\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c)$  este maxim, deoarece  $p$  este constant. Dar

$$\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

și deci  $(p-a)(p-b)(p-c)$  este maxim

$$\Leftrightarrow p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c.$$

**14)** Dintre toate triunghiurile de arie constantă, cel de perimetru minim este triunghiul echilateral.

**Soluție**

$$\sigma = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \cdot (a+b-c)(a-b+c)(-a+b-c) = \frac{16\sigma^2}{3} \text{ (const.)}.$$

Dar, din inegalitatea mediilor

$$\frac{\frac{a+b+c}{3} + (a+b-c) + (a-b+c) + (-a+b+c)}{4} \geq$$

$$\geq \sqrt[4]{\frac{a+b+c}{3} (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

deducem

$$\frac{\frac{a+b+c}{3} + (a+b-c) + (a-b+c) + (-a+b+c)}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{16\sigma^2}{3}}$$

sau

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{\frac{16\sigma^2}{3}}$$

deci perimetrul  $a+b+c$  va fi minim

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = a+b-c = a-b+c = -a+b+c \Leftrightarrow a=b=c.$$

**15)** Dintre toate paralelipedele dreptunghice de volum constant, acel care are aria totală minimă este cubul.

### Soluție

Fie  $x, y, z$  dimensiunile unui paralelipiped. Atunci volumul este  $xyz$ , iar aria totală este  $(xy + yz + xz) \cdot 2$ . Avem

$$\frac{xy + yz + xz}{3} \geq \sqrt[3]{(xy)(yz)(xz)} = \sqrt[3]{(xyz)^2} = \text{const.}$$

ceea ce se realizează  $\Leftrightarrow xy = yz = xz \Leftrightarrow x = y = z$ .

**16)** Dintre toate paralelipipedele dreptunghice care au aceeași arie totală, cel care are volumul maxim este cubul.

**Soluția** rezultă din problema 15).

**17)** Dintre toți cilindrii circulari drepti (cilindri de rotație) de același volum, să se găsească acela de arie totală minimă.

**Soluție**

Volumul  $= \pi R^2 G = \text{const.}$ , iar

$$\sigma_{\text{totala}} = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi(RG + R^2).$$

Trebuie găsit minimul sumei  $RG + R^2$  știind că  $R^2 G = \text{const.}$  Dar

$$R^2 G = \text{const.} \Leftrightarrow (R^2 G)^2 = \text{const.} \Leftrightarrow R^4 \cdot G^2 = (R^2)^1 \cdot (RG)^2 = \text{const.}$$

și avem

$$\frac{R^2 + \frac{RG}{2} + \frac{RG}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{R^2 \cdot \frac{(RG)^2}{4}} = \text{const.}$$

Minimul se va realiza pentru  $R^2 = \frac{RG}{2} \Leftrightarrow G = 2R$ , deci pentru cilindrul echilateral.

**18)** Să se găsească maximul volumului unui con de rotație, a cărui arie laterală este constantă.

**Soluție**

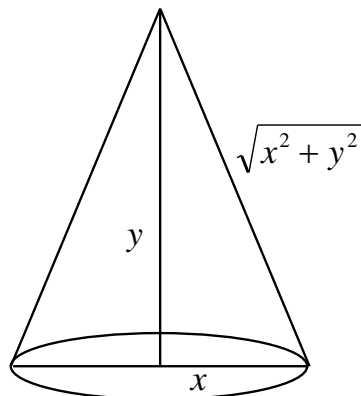


Fig. 4.18.

Aria laterală  $= \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi R G = \text{const.} = \pi a^2$  și trebuie găsit maximul volumului

$$v = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - x^2} = \frac{1}{3} \pi x \sqrt{a^4 - x^4},$$

adică maximul produsului  $x \sqrt{a^4 - x^4}$  sau maximul produsului  $x^4 (a^4 - x^4)^2$  știind că  $x^4 + (a^4 - x^4) = a^4 = \text{const.}$  Din

$$\frac{x^4 + \frac{a^4 - x^4}{2} + \frac{a^4 - x^4}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{x^4 \cdot \left(\frac{a^4 - x^4}{2}\right)^2}$$

rezultă că vom avea maxim când  $x^4 = \frac{a^4 - x^4}{2}$ , adică  $x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$ .

Din  $x \sqrt{x^2 + y^2} = a^2$  și  $x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$  găsim  $y = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$  și  $\sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt[4]{3}$ , ceea ce înseamnă  $G = R \sqrt[4]{3}$ .

#### Altă soluție

Aria laterală  $= \pi R G = \text{const.} \Rightarrow (R G)^2 = \text{const.}$ , iar volumul  $v = \frac{1}{3} \pi R^2 \sqrt{G^2 - R^2}$  va fi maxim odată cu

$$\left(R^2 \sqrt{G^2 - R^2}\right)^2 = R^4 (G^2 - R^2) = R^2 (R^2 G^2 - R^4) = (R^4)^{1/2} \cdot (R^2 G^2 - R^4)^1$$

sau cu  $R^4 (R^2 G^2 - R^4)^2$ .

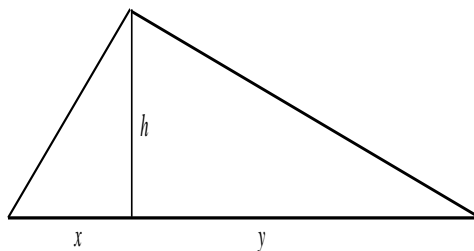
Din

$$\frac{R^4 + \frac{R^2 G^2 - R^4}{2} + \frac{R^2 G^2 - R^4}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{R^4 \left(\frac{R^2 G^2 - R^4}{2}\right)^2}$$

rezultă că vom avea maxim când  $R^4 = \frac{R^2 G^2 - R^4}{2} \Leftrightarrow G = R\sqrt{3}$ .

**19)** Să se găsească minimul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, în care produsul înălțimii prin proiecția unei catete pe ipotenuză este constant.

**Soluție**



**Fig. 4.19.**

Trebuie găsit minimul sumei  $x + y$  având  $h \cdot x = \text{const} = k$  sau  $x \cdot \sqrt{xy} = k \Leftrightarrow x^3 y = k^2$ . Din

$$\frac{\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + y}{4} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)^3 \cdot y}$$

rezultă că minimul se atinge atunci când  $\frac{x}{3} = y$ , deci  $x = 3y$ .

**20)** Se consideră toate triunghiurile echilaterale ale căror laturi conțin respectiv punctele date  $A, B, C$ . Să se determine acela de perimetru maxim.

### Soluție

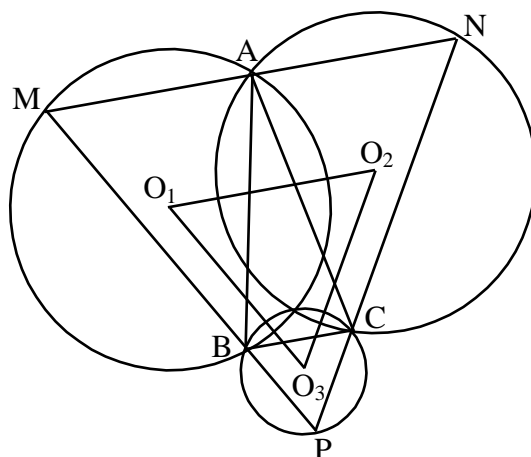


Fig. 4.20.

Vârfurile  $M, N, P$  ale unui astfel de triunghi sunt situate pe arcele de cerc capabile de  $60^\circ$  și care conțin perechile de puncte  $\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}$ . Perimetrul triunghiului  $MNP$  este maxim dacă  $MN$  este maxim, ceea ce înseamnă că  $MN \parallel O_1O_2$ , unde  $O_1$  și  $O_2$  sunt centrele cercurilor care conțin arcele de mai sus.

**21)** Dintre toate triunghiurile circumscrise aceluiași cerc de rază  $r$  să se găsească cel de arie minimă.

### Soluție

Vom folosi formula

$$\sigma = \frac{r^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}$$

pe care o demonstrăm.

Într-adevăr, din

$$\sigma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp$$

deducem

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = r^2 p^2 \Rightarrow p^2 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c) = r^2 p^4 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow p^2 &= \frac{r^2 p^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\
&= \frac{r^2}{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)} \cdot \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} \cdot \frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \Rightarrow \\
\Rightarrow p^2 r^2 &\stackrel{(1)}{=} \frac{r^4}{\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^2 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^2 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^2},
\end{aligned}$$

deoarece  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ , etc. Din (1) deducem

$$\sigma = pr = \frac{r^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}.$$

**22)** Să se găsească maximul ariei unui dreptunghi înscris într-un cerc dat.

### Soluție

Fie  $x, y$  lungimile laturilor dreptunghiului și  $r$  raza cercului. Avem  $x^2 + y^2 = 4r^2$  și trebuie găsit maximul produsului  $xy$  (sau al pătratului său  $x^2 y^2$ ). Rezultă  $x = y = r\sqrt{2}$ , deci aria maximă este egală cu  $2r^2$ .

**23)** Trei sfere de rază  $R$  sunt tangente unui plan  $\pi$  și sunt tangente două câte două. Arătați că există o sferă de rază  $r = \frac{1}{3}R$  tangentă la planul  $\pi$  și tangentă cu cele trei sfere.



### Soluție

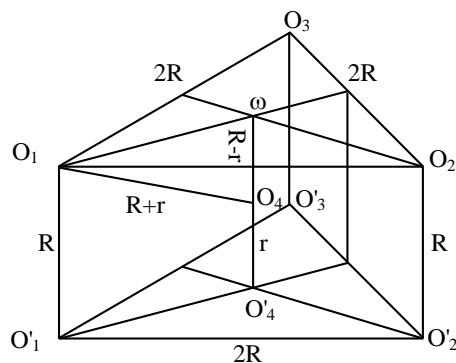
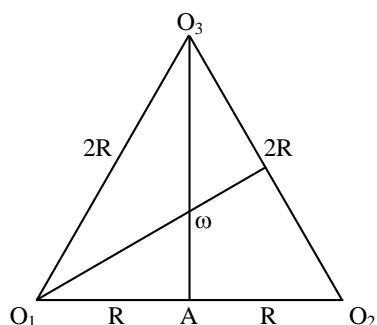


Fig. 4.23.

$$AO_3 = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

$$O_1\omega = \frac{2}{3} \cdot R\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$

Teorema lui Pitagora în  $\Delta O_1O_4\omega$  :

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \frac{4}{3} R^2$$

$$R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + \frac{4}{3} R^2$$

$$4Rr = \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3} R$$

**24)** Fie  $VABCD$  o piramidă patrulateră regulată în care latura bazei are lungimea  $a$  și unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei este congruent cu unghiul format de două muchii laterale ale unei fețe, măsura lor fiind  $\alpha$ .

- a) Să se arate că  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ;  
 b) Să se calculeze volumul piramidei  $VABCD$  .

**Soluție**

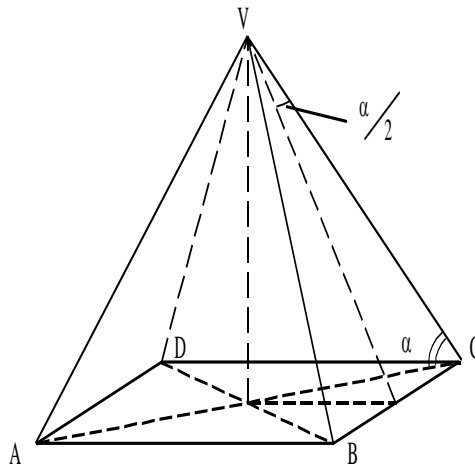


Fig. 4.24.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{EC}{VC} \Rightarrow VC = \frac{\frac{a}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} ;$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{VC} \Rightarrow VC = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha} ;$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

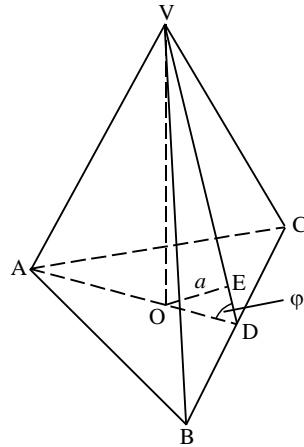
$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{VO}{OC} \Rightarrow VO = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \frac{a\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{2} \Rightarrow \\ \operatorname{vol} &= \frac{1}{3} a^2 \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{2} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{\sqrt{5} + 1}.\end{aligned}$$

25) Într-o piramidă triunghiulară regulată distanța de la centrul bazei la una din fețele laterale este egală cu  $a$ , iar măsura unghiului diedru format de bază cu o față laterală este  $\varphi$ . Arătați că aria laterală a piramidei este egală cu  $\frac{6\sqrt{3} \cdot a^2}{\sin \varphi \cdot \sin 2\varphi}$ .

**Soluție**



**Fig. 4.25.**

$$\text{Aria laterală} = \sigma = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot VD.$$

$$OD = \frac{a}{\sin \varphi}, \quad VD = \frac{OD}{\cos \varphi} = \frac{a}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{2a}{\sin^2 \varphi}.$$

$$AD = 3 \cdot OD = \frac{3a}{\sin \varphi}.$$

$$BC = AB = \frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{3a}{\sin \varphi} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6a}{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}$$

$$\sigma = \frac{3}{2} \cdot \frac{6a}{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{2a}{\sin 2\varphi} = \frac{6\sqrt{3} a^2}{\sin \varphi \cdot \sin 2\varphi}.$$

**26)** Să se arate că în orice triunghi există inegalitatea

$$\sqrt{2} \left( \sin \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{4} \right) \leq \sqrt{\frac{p(b+c)}{bc}}.$$

**Soluție.**

Inegalitatea din enunțul problemei este echivalentă cu

$$2 \left( 1 + 2 \sin \frac{A}{4} \cos \frac{A}{4} \right) \leq \frac{p(b+c)}{bc}$$

adică

$$1 + \sin \frac{A}{2} \leq \frac{p(b+c)}{2bc}.$$

Această ultimă inegalitate este echivalentă cu

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \leq \frac{pb+pc-2bc}{2bc},$$

adică cu

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \leq \frac{\frac{p-b}{b} + \frac{p-c}{c}}{2}.$$

Ultima inegalitate este adevărată căci reprezintă inegalitatea mediilor (pentru numerele pozitive  $\frac{p-b}{b}$  și  $\frac{p-c}{c}$ ).

**27)** Fie  $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Să se arate că

$$3 \cdot \left(\frac{\cos a}{\cos b}\right)^2 - 2 \left(\frac{\sin a}{\sin b}\right)^2 = 1$$

dacă și numai dacă

$$a = b.$$

**Soluție.**

Avem succesiv

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(\frac{\cos a}{\cos b}\right)^2 - 2 \left(\frac{\sin a}{\sin b}\right)^2 = 1 &\Leftrightarrow 3 \cos^2 a \sin^2 b - 2 \sin^2 a \cos^2 b = \\ &= \cos^2 b \sin^2 b \Leftrightarrow 3 \cos^2 a (1 - \cos^2 b) - 2 (1 - \cos^2 a) \cdot \cos^2 b = \\ &= \cos^2 b \cdot (1 - \cos^2 b) \Leftrightarrow 3 \cos^2 a - 3 \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2 \cos^2 b + 2 \cos^2 a \cdot \cos^2 b = \\ &= \cos^2 b - \cos^4 b \Leftrightarrow \cos^4 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 3 \cos^2 b + 3 \cos^2 a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cos^2 b - \cos^2 a)(\cos^2 b - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 b = \cos^2 a \text{ sau } \cos^2 b = 3. \end{aligned}$$

Cum  $\cos^2 b \in [0, 1]$ , avem  $\cos^2 a = \cos^2 b$ , inegalitate care este echivalentă cu  $a = b$ , deoarece  $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## GEOMETRIE

### PROBLEME PROPUSE

1) Pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$  se consideră punctul  $A'$  astfel încât  $\frac{BA'}{A'C} = 2$ . Fie  $D$  punctul de intersecție al segmentului  $AA'$  cu mediana  $CC'$ . Determinați raportul  $\frac{A'D}{AD}$ .

2) În triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  se consideră înălțimile  $AA'$  și  $BB'$ . Arătați că  $\frac{A'C}{B'C} = \frac{AC}{BC}$ .

3) Bisectoarea  $AD$  a triunghiului  $ABC$  intersectează cercul circumscris în punctul  $P$ . Arătați că triunghiurile  $ABP$  și  $BDP$  sunt asemenea.

4) Fie  $a$  și  $b$  lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic și  $c$  lungimea ipotenuzei. Arătați că raza cercului înscris în triunghi este egală cu  $\frac{1}{2}(a+b-c)$ , iar raza cercului tangent la ipotenuză și la prelungirile catetelor este egală cu  $\frac{1}{2}(a+b+c)$ .

5) Două cercuri se intersectează în  $A$  și  $B$ . Un punct  $X$  este situat pe dreapta  $AB$ , dar nu pe segmentul  $AB$ . Arătați că lungimile tangentelor duse din  $X$  la cele două cercuri sunt egale.

6) Fie  $C(O, R)$  și  $C(o, r)$  două cercuri tangente exterior și  $A \in C(O, R)$ ,  $B \in C(o, r)$  puncte astfel încât dreapta  $AB$  este tangenta celor două cercuri. Calculați lungimea segmentului  $AB$ .

7) Trei cercuri  $C(A,a), C(B,b), C(C,c)$ , unde  $a \geq b > c$ , sunt tangente exterior două câte două și sunt tangente unei drepte  $d$ . Arătați că  $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ .

8) Fie  $X$  un punct interior paralelogramului  $ABCD$ . Arătați că  $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$ , unde  $S_{MNP}$  este aria triunghiului  $MNP$ .

9) Arătați că medianele împart un triunghi în șase triunghiuri de arii egale.

10) Fie  $P$  un punct interior triunghiului  $ABC$  astfel încât triunghiurile  $ABP, BCP$  și  $ACP$  au arii egale. Arătați că  $P$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .

11) Fie  $AM$  bisectoarea interioară a triunghiului  $ABC$ . Arătați că  $\overrightarrow{AM} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ , unde  $b = |\overrightarrow{AC}|, c = |\overrightarrow{AB}|$ .

12) Arătați că  $|\vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{v} - \vec{w}|^2 = 2(|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2), \forall \vec{v}, \vec{w}$ .

13) Arătați că dacă vectorii  $\vec{v} + \vec{w}$  și  $\vec{v} - \vec{w}$  sunt perpendiculari, atunci  $|\vec{v}| = |\vec{w}|$ .

14) Se consideră dreptele de ecuații  $x=1, y=1, x-y=1$  și cercurile de ecuații

$$\begin{aligned} \left(x-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2}, \\ \left(x-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2},$$

$$\left(x - \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{(2-\sqrt{2})^2}.$$

Arătați că fiecare dintre cele trei drepte este tangentă cu cele patru cercuri.

**15)** Arătați că elipsa ale cărei focare sunt punctele de coordonate  $(1,0)$  și  $(0,1)$  și a cărei axă mare are lungimea egală cu 2, are ecuația  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$ .



# INFORMATICĂ

## PROBLEME REZOLVATE

1) Scrieți un program care să afișeze câte numere prime există mai mici decât un **N** dat.

Exemplu : **N**=1000; rezultat : 168.

**Soluție :**

```
#include "stdio.h"

bool prim(int n)
{
    int i;
    for(i=2;i<=n/2;i++)
        if(n%i==0) return false;
    return true;
}

void main(void)
{
    //variabile
    int n,i,k;
    //citire date
    printf("n=");scanf("%d",&n);
    //procesare: incrementăm k
    //pt fiecare numar prim găsit
    k=0;
    for(i=2;i<n;i++)
        if(prim(i))k++;
    //afișare rezultat
    printf("%d\n",k);
}
```

**2) Fie şirul :**

$a_0 = x$  (unde  $x$  este un număr natural nenul dat) ;

$a_{n+1} = a_n/2$ , dacă  $n \geq 0$  şi  $a_n$  este par ;

$a_{n+1} = 3*a_n+1$ , dacă  $n \geq 0$  şi  $a_n$  este impar.

Scrieţi un program care primind  $x$  afişează numărul  $n$  minim cu proprietatea ca  $a_n=1$ .

Exemplu :  $x=27$ ; rezultat : 111.

**Soluţie :**

```
#include "stdio.h"

void main(void)
{
    //variabile
    int x,n,a;
    //citire date
    printf("x=");scanf("%d",&x);
    //procesare: calculăm următorul termen
    // al şirului
    //şi ne oprim când este egal cu 1
    //menţinem în n indicele curent
    n=0;
    a=x;
    while(a!=1)
    {
        n++;
        if(a%2==0)a/=2;
        else a=3*a+1;
    }
    //afişare rezultat
    printf("%d\n",n);
}
```

**3) Conjectura lui Goldbach** spune că orice număr par  $> 2$  este suma a două numere prime. Nimeni nu a putut demonstra că este adevărat. Scrieţi un program care verifică acest lucru pentru toate numerele pare până la  $N$  dat.

**Soluție :**

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"

bool prim(int n)
{
    int i;
    for(i=2; i<=n/2; i++)
        if(n%i==0) return false;
    return true;
}

bool verifică(int n)
{
    int i;
    for(i=2; i<=n/2; i++)
        if(prim(i) && prim(n-i))
            return true;
    return false;
}

void main(void)
{
    //variabile
    int n, k;
    //citire date
    printf("n="); scanf("%d", &n);
    //procesare: verificăm
    //    pentru fiecare k par
    for(k=4; k<=n; k+=2)
        if(!verifică(k))
        {
            printf("%d nu verifica!\n", k);
            exit(0);
        }
    //afișare rezultat
    printf("se verifică pentru numere >2"
        " si <=%d\n", n);
}
```

4) Folosiți calculatorul (scrieți un program) pentru a determina care este cel mai mic număr care se poate scrie în două moduri distincte ca sumă de cuburi de numere naturale nenule.

**Soluție :**

```
#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"

int cub(int n)
{
    return n*n*n;
}

//testează dacă n este un  $x^3$ , cu  $x \geq \text{inf}$ 
bool este_cub(int n,int inf)
{
    int i;
    for(i=inf;i<=n;i++)
    {
        int c=cub(i);
        if(c==n)return true;
        else if(c>n)return false;//optimizare
    }
    return false;
}

//găsește prima descompunere cu elemente  $\geq \text{inf}$ 
int primulcub(int n,int inf)
{
    int i;
    for(i=inf;i<=n/2;i++)
    {
        int c=cub(i);
        if(c>n)return -1;//optimizare
        if(este_cub(n-c,i))return i;
    }
    return -1;//nu există
}
```

```

bool verifica(int n)
{
    //verifică dacă există două variante distincte
    int c=primulcub(n,1);
    if(c!=-1)
    {
        int d=primulcub(n,c+1);
        if(d!=-1)return true;
    }
    return false;
}

void main(void)
{
    //variabile
    int n;
    //procesare: incrementăm n
    //      până când obținem o valoare convenabilă
    n=2;
    while(!verifica(n))n++;
    //afișare rezultat
    printf("n=%d\n",n);
}

```

**5)** Se dă un șir de numere  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și un număr  $S$ . Să se determine subșirul cu număr minim de elemente al lui  $a$  de sumă  $S$  și să se afișeze, sau să se afișeze “nu există” atunci când suma oricărui subșir al lui  $a$  este diferită de  $S$ .

Exemplu :

$a=(10,10,10,30,60,20)$   $S=50$ ; rezultat (30,20)

**Soluție :**

```

#include "stdio.h"
//variabile globale
const nmax=100;
int v[nmax], a[nmax], sol[nmax], opt[nmax], minim;
int n;

```

```

void bk(int k,int s,int nr)
//s=suma încă disponibilă
//nr=câte elemente are submulțimea curentă
{
    if(k>n)
    {
        if(s==0)
        {
            if(nr<minim)
            {
                minim=nr;
                int i;
                for(i=0;i<n;i++)opt[i]=sol[i];
            }
        }
    }
    else
    {
        sol[k]=0;
        bk(k+1,s,nr);
        if(s>=a[k])
        {
            sol[k]=1;
            bk(k+1,s-a[k],nr+1);
        }
    }
}

void main(void)
{
    //variabile
    int i,s;
    //citire date
    printf("n=");scanf("%d",&n);
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        printf("a[%d]=",i);scanf("%d",&(a[i]));
    }
    printf("s=");scanf("%d",&s);
}

```

```

//procesare: generăm toate submulțimile
//prin backtracking
//și o alegem pe cea mai bună
minim=n+1;
bk(1,s,0);
//afișare rezultat
if(minim<=n)//cel puțin o soluție a
    //    fost găsită
{
    for(i=0;i<n;i++)
        if(opt[i])printf("%d ",a[i]);
    printf("\n");
}
else
{
    printf("nu există soluții\n");
}
}

```

**6)** Se dă un grup de oameni, numerotați de la 1 la N. Se mai dă o listă de **M** perechi de numere de forma **(i,j)** cu semnificația că persoanele **i** și **j** se antipatizează. Să se spună câte variante există pentru crearea unei grupe de **K** persoane în care să nu existe antipatii și să se listeze aceste grupe.

Exemplu :

n=4

m=1 perechile: (1,2)

k=3

Rezultat :

există 2 variante

**Soluție :**

Vom memora graful dat de perechile citite într-o matrice de adiacență.

Se vor genera combinațiile de N luate câte k și se va testa condiția suplimentară folosind matricea de adiacență.

```
#include "stdio.h"
```

```

//variabile globale
const nmax=100;
int a[nmax][nmax]; //matrice de adiacență
int sol[nmax], n, k, nr;

bool ok(int pers, int completate)
//testează dacă persoana pers poate fi adăugată
//la grupul curent din sol
{
    int i;
    for(i=0; i<completate; i++)
        if(a[pers][sol[i]]) return false;
    return true;
}

void bk(int t, int inf)
//t=câte elemente mai trebuie stabilite
//inf=valoarea minimă a elementelor
{
    if(t==0) nr++;
    else
    {
        int i;
        for(i=inf; i<=n; i++)
            if(ok(i, k-t))
            {
                sol[k-t]=i;
                bk(t-1, i+1);
            }
    }
}

void main(void)
{
    //variabile locale
    int i, j, t, m;
    //citire date
    printf("n="); scanf("%d", &n);
    printf("m="); scanf("%d", &m);
}

```



```

printf("k=");scanf("%d",&k);
for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<n;j++)
        a[i][j]=0;;
for(t=0;t<m;t++)
{
    printf("i%d=",t);scanf("%d",&i);
    printf("j%d=",t);scanf("%d",&j);
    a[i][j]=a[j][i]=1;
}
//procesare: generăm toate combinările
//de n luate câte k
//prin backtracking
//și le numărăm pe cele acceptabile
nr=0;
bk(k,1);
//afișare rezultat
printf("există %d variante\n",nr);
}

```

**7) Arătați mai multe (cel puțin două) moduri posibile de a interschimba valorile a două variabile de același tip.**

**Soluție :** (pentru variabile de tip **int**)

- 1)  $t=a; a=b; b=t;$
- 2)  $a+=b; b=a-b; a-=b;$
- 3)  $a^=b; b^=a; a^=b;$

**8) Scrieți un program care rotește elementele unui vector circular spre dreapta de **K** ori.**

Exemplu:  $k=2, V=(5, 2, 8, 6, 4);$  Rezultat :  $(6, 4, 5, 2, 8)$

**Soluție :**

```

#include "stdio.h"

void rotație(int a[],int n)

```

```

    {
        int i,t;
        t=a[n-1];
        for(i=n-1;i>0;i--) a[i]=a[i-1];
        a[0]=t;
    }
void main(void)
{
    //variabile
    int v[100],n,i,k;
    //citire date
    printf("n=");scanf("%d",&n);
    for(i=0;i<n;i++)
    {

        printf("v[%d]=",i);scanf("%d",&(v[i]));
    }
    printf("k=");scanf("%d",&k);
    //procesare: rotim de k ori spre dreapta
    for(i=0;i<k;i++)rotație(v,n);
    //afișare rezultat
    for(i=0;i<n;i++) printf("%d ",v[i]);
    printf("\n");
}

```

#### **Soluție alternativă :**

- se inversează ordinea primelor n-k componente ;
- se inversează ordinea ultimelor k componente ;
- se inversează ordinea elementelor din vectorul astfel obținut ;

Timpul nu depinde de k**9)** Citeste un șir de numere întregi și scrie maximul dintre ele; se presupune că șirul conține cel puțin un număr.

```

# include <stdio.h>
void main (void)
{ int max, i;
scanf ("%d ", & max);
scanf ("%d", &i);

```

```

while (i!=0){scanf("%d", &i );
               if (i> max ) max =i; }
printf ("max = % d \n ", max );
}

```

**10)** Citește valoarea lui  $x$  și scrie valoarea funcției de mai jos:

$$\begin{cases} 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1 & \text{pentru } x < 0 \\ 100 & \text{pentru } x = 0 \\ 2x^2 + 8x - 1 & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

```

#include <stdio.h>
void main(void)
{float x,y;
scanf("%f",&x);
if (x<0)y=4*x*x*x+5*x*x-2*x+1;
    else if (x == 0) y = 100.0;
    else y = 2*x*x+8*x-1;
printf("y(x)=%f\n",y);
}

```

**11)** Testează dacă s-a citit o literă mare din fișierul standard de intrare și numai în acest caz o rescrie ca literă mică la ieșirea standard. Dacă la intrare nu se află o literă mare, se rescrie caracterul respectiv.

```

# include <stdio.h>
void main (void)

{int c;
putchar (((c = getchar ()) >= 'A' && c <='Z' )?
c - 'A' + 'a' : c );
}

```

**12)** Citește componentele a doi vectori  $u$  și  $v$ , calculează și afișează produsul lor scalar

$$P = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

```
# include <stdio.h>
#define MAX 20
void main (void)
{int n,i; float u[MAX],v[MAX],s;
scanf ("%d",&n);
if (n<=0 || n > MAX)
    printf ("dimensiune eronată :%d\ n",n);
else {i=0 ;
    while (i<n && scanf("%f",&u[i])==1) i++;
    if (i<n)
        printf("vectorul u are componente eronate \n ");
    else{i=0;
        while(i<n && scanf("%f",&v[i])==1) i++;
        if (i<n)
            printf("vectorul v are componente eronate \n");
        else {i=0;s=0;
            while (i<n){s=s+u[i]*v[i];i++;}
            printf("produsul scalar = % f \n ",s);
        }
    }
}
```

**13)** Afișează numerele lui Fibonacci, mai mici sau egale cu  $n$  dat.

$$(f_0=0; f_1=1, f_i = f_{i-2} + f_{i-1})$$

```
# include <stdio.h>
#define MAXFIB 32767
void main(void)
{long n;
unsigned f0,f1,fi;
    if(scanf("%ld",&n)!=1 || n<0 || n>MAXFIB)
        printf("n este eronat \n");
```

```

else { printf ("%d\n",0);
      for (f0=0,f1=1;f1<=n;f0=f1,f1=f1)
        {f1=f0+f1;
         printf ("%u\n", f1);}
      }
}

```

**14)** Programul efectuează operații cu mulțimi de numere întregi cuprinse între 0 și 255 ale căror elemente sunt citite.

```

var a:array[1..2] of set of byte; c:set of byte;
at:array[1..2,1..256] of integer;
ds:array[1..256] of integer;
na:array[1..2] of byte;i,j,j1,j2,k,l:byte;
d:string[1];
begin
  for j:=1 to 2 do
    begin
      writeln('Dați elementele mulțimii ',j, ' de
nr.intregi între 0 si 255');
      a[j]:=[];
      write('Continuați?(d/n) ');readln(d);
      i:=0;
      while not((length(d)>0)and(d[1] in ['N','n'])) do
        begin
          write('Următorul: '); readln(l);
          c:=a[j]; a[j]:=a[j]+[l];
          if c<>a[j] then
            begin
              i:=i+1;
              at[j,i]:=1
            end
        else writeln('Elementul se repetă! ');
        write('Continuați?(d/n) '); readln(d);
        end;
      na[j]:=i
    end;
  c:=a[1]*a[2];
  writeln('S-au citit: ');

```

```

for j:=1 to 2 do
begin
    write('multimea',j, '=');
    write('{');
    if na[j]>0 then begin
        for i:=1 to na[j]-1 do
            write at[j,i], ', ';
        write(at[j,na[j]])
        end;
    writeln('}')
end;
writeln('Reuniunea='); write('{'); d:= ' ';
if na[1]>0 then begin
    d:=', ';
    for i:=1 to na[1]-1 do
        write(at[1,i], ', ');
    write(at[1,na[1]])
    end;
if c<>a[2] then
begin
    i:=1;
    while at[2,i] in c do i:=i+1
    write (d,at[2,i]);
    for j:=i+1 to na[2] do
        if not(at[2,j] in c)
            then write(', ',at[2,j])
    end;
writeln('}');
writeln('Intersecția='); write('{');
if c<> [] then
begin
    i:=1 while not(at[1,i] in c) do i:=i+1;
    write(at[1,i]);
    for j:=i+1 to na[1] do if at[1,j] in c then
        write (' ',at[1,j])
    end;
writeln('}');
k:=0;
writeln('Diferențe: ');

```

```

for j1:1 to 2 do
begin
j2:=(j1+1) div j1;
writeln('mulțimea ',j1, ' - mulțimea ',j2, '=');
write('{');
if not (a[j1] <=a[j2]) then
begin
i:=1;
while at[j1,i] in a[j2] do i:=i+1;
write(at[j1,i]);
k:=k+1;
ds[k]:=at[j1,i];
for j:=i+1 to na[j1] do if not(at[j1,j] in a[j2])
then
begin
write(', ',at[j1,j]);
k:=k+1; ds[k]:=at[j1,j]
end
end;
writeln('}')
end;
writeln('Diferența simetrică='); write('{');
if k>0 then
begin
for i:=1 to k-1 do write(ds[i],',');
write(ds[k])
end;

writeln('}'); readln
end.

```

**15) Programul numără aparițiile unui subșir într-un șir de caractere dat și afisează pozițiile în care apare.**

```

var s,sc:string; n,i,1 byte; pos:array[1..255] of
byte;
begin
writeln('Dați un șir de caractere: '); readln(s);
writeln('Dați subșirul căutat: '); readln(sc);

```

```

l:=length(sc); n:=0;
for i:=1 to length(s)-l+1 do
    if sc=copy(s,i,l) then
        begin
            n:=n+1;
            pos[n]:=i
        end;
write('Subcuvântul apare de ',n, ' ori');
write('în pozițiile: ');
for i:=1 to n-1 do write(pos[i],',');
writeln(pos[n]);readln
end.

```

### 16) Recursivitate

Să se afișeze valoarea  $n!$  calculată într-o funcție recursivă.

```

program factorial-recursiv;
type natural =0 ... maxlongint;
var n: byte;
function fact (n:byte) : natural;
begin
    if n=0 then fact := 1
    else fact := n * fact(n-1);
end;
begin
    write('Dați n = '); readln(n);
    writeln(n, '!= ',fact(n))
end.

```

**17)** Se citesc  $n$  cuvinte terminate cu câte un blank din  $n$  linii și să se afișeze fiecare cuvânt așa cum s-a citit și apoi cu literele inversate.

```

program inversare-cuvinte;
var i;n:byte;
procedure inversează;
var c : char;
begin
    read(c); write(c);
    if c<>' ' then inversează;

```



```

        write (c);
end;
begin
    write('dați numărul de cuvinte');
    readln(n);
    for i:=1 to n do
        begin
            write('cuvântul terminat cu blanc');
            inversează
            writeln;
        end;
    end.

```

### 18) Fișiere

Să se intercaleze două fișiere ordonate strict descrescător.

```

program interclasare;
var aa,bb,cc: file of integer;
    l,x,y:integer;
begin
    assign(aa, 'a.dat');
    assign(bb, 'b.dat');
    assign(cc, 'c.dat');
    rewrite(aa);
    repeat read(x);
        write(aa,x);
    until x=0;

    close(aa);
    rewrite(bb);
    repeat read(y);
        write(bb,y);
    until y=0;
    close(bb);
    rewrite(cc); reset(aa); reset(bb);
    read(aa,x); read(bb,y);
    while not eof(aa) and not eof(bb) do
        begin
            if x<y then begin

```

```

        write(cc,y);
        read(bb,y);
    end
    else if x>y then begin
        write(cc,x);
        read(aa,x);
    end
    else begin
        write(cc,x);
        read(aa,x);
        read(bb,y);
    end;
end;
while not eof(aa) do begin
    write(cc,x); read(aa,x);
end;
while not eof(bb) do begin
    write(cc,y); read(bb,y);
end;

close(cc);
reset(cc);
while not eof(cc) do begin
    read(cc,l);
    write(l, ' ');
end;

end.

```

### 19) Liste

Se citește un șir de litere mici din alfabet, terminat cu caracterul "\$". Să se pună într-o stivă toate literele citite. Se citește apoi o literă oarecare y din alfabet. Să se genereze două liste de tip stivă ; prima să cuprindă literele din stiva inițială care preced în alfabet literei alese y, cealaltă să cuprindă literele din stiva inițială care succed literei alese.

```

program prelucrare;
type reper = ^ element;
    element = record
        litera:'a'..'z';
        urm:reper
    end;

```

```

var vârfl, vârfl1, vârfl2, p,q:reper;
    şir:string;i:byte;y:'a'..'z';
begin
write('Şirul terminat cu $');readln(şir);
vârfl:=nil;
i:=1;
while şir[i]<>'$' do
    begin new(p);
        p^.litera:= şir[i];
        p^.urm:=vârfl;
        vârfl:=p;
        i:=i+1
    end;
write ('litera y='); readln(y);
if vârfl = nil then
    writeln('stiva inițială este vidă')
else
    begin vârfl1:=nil;
        vârfl2:=nil;
        p:=vârfl;
        repeat
            if p^.litera <y then begin
                new(q);
                q^.litera:=p^.litera;
                q^.urm:=vârfl1;
                vârfl1:=q;
            end;
            else
                if p^.litera > y then
                    begin
                        new(q);
                        q^.litera:=p^.litera;
                        q^.urm:=vârfl2;
                        vârfl2:=q;
                    end;
        until p = nil;
        if vârfl1=nil then
            writeln('nu există litere care preced y')
    end;

```

```

        else begin
            p:=vârf1;
            repeat
                write(p^.litera:2);
                p:=p^.urm;
            until p=nil;
        end;
writeln;
if vârf2 =nil then writeln('nu există litere
care succed y')
    else begin
        p:=vârf2;
        writeln' \literele care succed y');
        repeat
            write(p^.litera:2);
            p:=p^.urm;
        until p=nil;
        end;
    end;
end.

```

20) Să se creeze un arbore binar și să se determine înălțimea lui.

### Soluție

```

#include <iostream.h>
typedef struct nod{
    int inf;
    nod *legs,*legd;
}arb;
void creare(arb * &rad){
    int x;
    cin>>x;
    if(x) {rad=new arb;

```

```

        rad->inf=x;
        creare(rad->legs);
        creare(rad->legd);
    }
    else rad=0;
}
int inaltime(arb * rad){
    int x,y;
    if(rad){x=inaltime(rad->legs);
            y=inaltime(rad->legd);
            if (x<y) return y+1;
            else return x+1;
        }
    else return 0;
}
void main(){
    arb *rad;
    creare(rad);
    cout<<"inaltimea arborelui este "<<inaltime(rad);
}

```

**21)** Fie  $A$  o matrice cu  $m$  linii și  $n$  coloane cu elemente de la 1 la 9. Numim componenta conexă în  $A$  un grup de elemente cu aceeași valoare așezate consecutiv pe aceeași linie sau coloană. Să se determine aria componentei lui  $A$  cu număr maxim de elemente.

1	1	1	2	3
1	1	2	2	3
1	2	1	4	4

### Soluție

```

#include <iostream.h>
int max=0;
int n,m,contor;
int a[10][10];
void parcurg(int u,int v,int z){

```

```

if (!(u<0)||u>=n)||v<0)||v>=m)))
    if (a[u][v]==z )
        {a[u][v]=0;
         contor++;
         parcurg(u-1,v,z);parcurg(u+1,v,z);
         parcurg(u,v+1,z);parcurg(u,v-1,z);
        }
}

```

**22) Problema lui *Josephus*.** Un număr de  $n$  persoane sunt așezate în cerc și numărate din  $m$  în  $m$  începând de la persoana de pe poziția  $k$ . Persoana care a fost numărată pe poziția  $m$  pleacă. Dându-se  $n$ ,  $m$  și  $k$ , să se afișeze ordinea plecării persoanelor. Se cere o implementare care folosește alocarea secvențială.

### Soluție

```

#include <iostream.h>
void main(){
    int n,m,k,i,j;
    int a[50];
    cout<<"Numarul de persoane ";
    cin>>n;
    cout<<"Pasul de numarare ";
    cin>>m;
    cout<<"Pozitia de plecare ";
    cin>>k;

    for(i=0;i<n;i++) a[i]=i+1;
    i=k-1;
    cout<<a[i]<<" ";
    a[i]=0;
    for(int repeta=1;repeta<n;repeta++){
        j=m;
        while(j>=1){if (a[(i+1)%n]) j--;
                    i=(i+1)%n;
                    }
        cout<<a[i]<<" ";
    }
}

```

```
    a[i]=0;  
}
```





## INFORMATICĂ

### PROBLEME PROPUSE

1) Se consideră un graf neorientat cu structură de arbore. Să se determine cel mai lung drum în arbore.

2) Se citește de la intrare un șir de paranteze rounde deschise și închise. Să se determine dacă șirul de paranteze este corect.

3) Se dau numerele naturale  $n$  și  $k$ , cu  $1 \leq k \leq n$ . Să se calculeze  $C_n^k$  fără a depăși valoarea finală.

4) Se dau numerele naturale  $n$  și  $k$ , cu  $1 \leq k \leq n$ . Să se determine toate combinațiile de  $k$  obiecte din  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

5) Se consideră un caroiaj  $3 \times n$ , ce trebuie pavat cu dale de dimensiuni  $1 \times 2$ . Să se calculeze numărul de pavări distincte. Două pavări simetrice dar neidentice sunt considerate distincte.

6) Se consideră vectorul  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ale cărui elemente sunt numere reale.

a) Ordonăți crescător elementele vectorului ;

b) Determinați numărul real  $\alpha$  care minimizează suma  $\sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$ .

7) Se citesc de la intrare numere întregi până la întâlnirea primului număr negativ. Să se listeze numerele naturale astfel citite în ordinea directă și în ordinea inversă în care au fost introduse de la intrare.

8) Fiind date numerele reale  $x_1, \dots, x_n$ , să se determine coeficienții polinomului de grad  $n$ , în care coeficientul lui  $x^n$  este 1, care le admite ca rădăcini.

9) Se consideră o matrice pătrată de ordin  $n$  având ca elemente numere reale. Să se reordoneze elementele matricii astfel încât pe orice linie și pe orice coloană elementele să apară în ordine crescătoare.

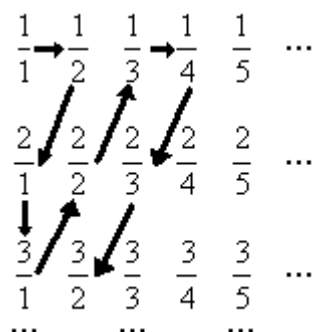
10) Se consideră o lege de compoziție  $\bullet$  pe mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$  dată prin matricea  $A$  de ordin  $n$ :  $i \bullet j = a_{ij}$ . Să se determine dacă legea de compoziție are element neutru, caz în care se cere și acest element.

11) Pe mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  citit de la tastatură, se definește o relație de echivalență  $\mathcal{R}$  sub forma unei matrice pătratice astfel:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca } i \mathcal{R} j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Să se alcatuiască clasele de echivalență determinate de  $\mathcal{R}$ .

12) Se consideră următoarea matrice infinită



Considerând ordinea indicată de săgeți, să se determine care este numărul rațional aflat pe poziția  $k$  citită de la tastatură.

13) Se dau  $n$  cuburi, și pentru fiecare cub  $i$  se cunoaste lungimea laturii  $l_i$  si culoarea  $c_i$ . Să se formeze un turn de înăltime maximă astfel încât dacă cubul  $i$  stă pe cubul  $j$  atunci  $l_j > l_i$  și  $c_i \neq c_j$ .

14) Se dă un graf conex neorientat. Să se determine un ciclu de lungime maximă.

**15)** Fie  $1 \leq n \leq 10$  și se citește o permutare a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Determinați numărul de ordine al permutării în cadrul mulțimii de permutări ordonate lexicografic.

**Exemplu:** dacă  $n=4$ , permutarea 2134 are numărul de ordine 7.

## MODELE DE TESTE PENTRU ADMITERE

### TESTUL A

**I.** Pentru  $n \geq 1$  se consideră polinomul  $f_n \in \mathbb{R}[X]$ .

**1.**  $f_n = (X-1)^n + (X-2)^n - 1$ .

**a)** Să se afle  $n$  dacă  $X^{n-2}$  are coeficientul 15 ;

**b)** Să se afle dacă 3 este soluție pentru ecuația  $f_n(x) = n^2$  ;

**c)** Să se determine rădăcinile reale ale lui  $f_n$  ;

**d)** În ce cazuri  $f_{2n}$  se divide cu  $f_n$  ?

**2.** Fie  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$ .

Să se arate că :

**a)**  $(M, \cdot)$  este grup comutativ ;

**b)** Mulțimea  $M$  are o infinitate de elemente.

**II.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & , \text{pentru } x \leq 1 \\ ax^2 - ax + b & , \text{pentru } x > 1 \end{cases}$ .

**a)** Să se determine  $a$  și  $b$  dacă  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ .

**b)** Să se determine  $a$  și  $b$  dacă  $\int_{-1}^2 |f(x)| dx = 3$ .

**III.** Un trapez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) cu diagonalele perpendiculare.

Lungimile laturilor  $AB, BC, CD, DA$  sunt  $a, b, c, d$ . Să se arate că :

**a)**  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  ;

**b)** Aria trapezului este pătratul înălțimii dacă și numai dacă trapezul este isoscel ;

**c)** Dacă trapezul admite un cerc înscris atunci una dintre diagonale este axă de simetrie ;

**d)** Se consideră în spațiu un punct  $M$  și se notează  $V_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $V_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $V_3 = \overrightarrow{MC}$ . Dacă  $C = 2a$  să se calculeze  $\overrightarrow{MD}$  în funcție de  $V_1, V_2, V_3$ .

## SOLUȚII

### I.

#### 1)

a) Avem  $C_n^2(1+2^2)=15$  și deci  $\frac{n(n-1)}{2}=3$  adică  $n=3$ .

b) Ecuația se scrie  $2^n = 2^2$ . Verificările făcute pentru  $n \leq 4$  arată că  $n=2$  și  $n=4$  sunt soluții.

Pentru  $n \geq 5$  se arată prin inducție că  $2^n > n^2$  și deci soluțiile sunt numai  $n=2$  și  $n=4$ .

c) Avem  $f'_n(x) = n[(x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1}]$ . Dacă  $n$  este impar ecuația  $f'_n(x)=0$  nu are soluții și din teorema lui Rolle ecuația  $f_n(x)=0$  are cel mult o soluție.

Avem  $f_n(x)=0$  dacă și numai dacă  $x=2$ . Dacă  $n$  este par avem

$f'_n(x)=0 \Leftrightarrow x-1=2-x \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \infty$  și

$f_n\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - 1 < 0$  și deci  $x_1 \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  și  $x_2 \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ . Rădăcinile sunt  $x_1=1$  și  $x_2=2$ .

d) Dacă  $n=1$  avem  $f_2=2(X^2-3X+2)$  și  $f_1=2(X-2)$  și deci  $f_1 \mid f_2$ . Dacă  $n=2$  avem  $f_4=2(X^2-3X+2)(X^2-3X+4)$  și deci  $f_2 \mid f_4$ . Pentru  $n \geq 3$ ,  $f_n$  are rădăcini din  $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ . Fie  $\alpha \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$  cu  $f_n(\alpha)=0$  adică

$$(\alpha-1)^n = 1 - (\alpha-2)^n \quad (1)$$

Dacă  $f_n \mid f_{2n}$  rezultă

$$(\alpha-1)^{2n} = 1 - (\alpha-2)^{2n} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\left(1 - (\alpha-2)^n\right)^2 = 1 - (\alpha-2)^{2n} \text{ adică } (\alpha-2)^n \left[(\alpha-2)^n - 1\right] = 0.$$

Ținând seama de (1) avem  $(\alpha-2)^n(\alpha-1)^n = 0$  ceea ce este în contradicție cu  $\alpha \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ . Valorile acceptabile pentru  $n$  sunt  $n=1$  și  $n=2$ .

**2.**

**a)** Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1.$$

$$\text{Avem } AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ unde } \alpha = ac - bd; \beta = ad + bc. \text{ Avem } \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$$

$$\text{și } \alpha^2 + \beta^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1.$$

Rezultă  $AB \in M$  și  $AB = BA$ . Cum în  $M_2(\mathbb{Q})$  înmulțirea este asociativă această proprietate se regăsește și în  $M$ . Pentru  $a=1, b=0$  avem  $a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 = 1$  și deci  $I_2 \in M$ . Inversa matricii  $A$  este  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$  deoarece  $a, -b \in \mathbb{Q}$  și  $a^2 + (-b)^2 = 1$ . Rezultă deci că  $(M, \cdot)$  este grup comutativ.

**b)** Fie  $r \in \mathbb{Q}$  și  $a = \frac{2r}{1+r^2}, \quad b = \frac{1-r}{1+r^2}$ . Avem  $a^2 + b^2 = 1$  pentru orice  $r \in \mathbb{Q}$ , adică mulțimea  $M$  are o infinitate de elemente.

**II.**

**a)**  $f$  este derivabilă pe fiecare dintre intervalele  $(-\infty, 1)$  și  $(1, \infty)$  fiind suma sau produs de funcții elementare. Continuitatea în 1 este asigurată de condițiile  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$ , adică  $b = -2$ .

$$\text{Condiția de derivabilitate este } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

$$\text{adică } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - ax}{x - 1} \Leftrightarrow a = -1.$$

**b)** Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx + \int_0^1 (-x^2 + 3x) dx + \int_1^2 |f(x)| dx = \\ &= 3 + \int_1^2 |ax^2 - ax + b| dx. \end{aligned}$$

$$\text{Avem } I = 3 \Leftrightarrow \int_1^2 |ax^2 - ax + b| dx = 0.$$

Vom demonstra că dacă  $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  este o funcție continuă și

$\int_a^b g(x) dx = 0$  atunci  $g(x) = 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$ . Presupunem că există  $x_0 \in (a, b)$  astfel ca  $g(x_0) > 0$ . Cum  $f$  este continuă există o vecinătate  $V(x_0)$  astfel că pentru orice  $x \in V(x_0)$  avem  $g(x) > 0$ . Fie  $\varepsilon > 0$  astfel ca  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset V(x_0) \cap [a, b]$  și  $m$  minimumul lui  $f$  pe intervalul închis  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ . Rezultă  $m > 0$ . Dacă  $x_0 \in (a, b)$  avem contradicția

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^{x_0 - \varepsilon} g(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} g(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b g(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} m dx \equiv 2m\varepsilon > 0.$$

Analog se tratează cazul  $x_0 = a$  sau  $x_0 = b$ . În cazul nostru rezultă că  $ax^2 - ax + b = 0$  pentru orice  $x \in [1, 2]$ . Cum polinomul  $P = ax^2 - ax + b$  are o infinitate de rădăcini rezultă  $P = 0$  adică  $a = b = 0$ .

### III.

a) Fie o intersecție a diagonalelor. Avem

$$a^2 + c^2 = (OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2)$$

și

$$b^2 + d^2 = (OB^2 + OC^2) + (OA^2 + OD^2)$$

deci  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ .

b) Fie  $M$  și  $N$  mijloacele lui  $AB$  și  $DC$ . Avem  $OM = \frac{a}{2}$ ,  $ON = \frac{c}{2}$  și

deci  $\sigma(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot h = (OM + ON)h$ . Perpendiculara din  $O$  pe  $AB$  intersectează  $AB$  și  $DC$  în  $M'$  și  $N'$ . Avem  $h = OM' + ON'$  și  $OM \geq OM'$ ,  $ON \geq ON'$  și deci  $\sigma(ABCD) \geq h^2$ . Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $OM = OM'$  și  $ON = ON'$ . În acest caz avem  $OA = OB$ ,  $OD = OC$  și deci  $AD = BC$ , adică trapezul este isoscel.

c) Se arată că  $a+c=b+d$  și cum  $a^2+c^2=b^2+d^2$  rezultă  $ac=bd$  și deci  $a=b$  și  $c=d$  sau  $a=d$  și  $c=b$ , adică  $BD$  este axa de simetrie sau  $AC$  este axă de simetrie.

**Observație.** Este valabilă și reciproca acestei proprietăți.

$$d) \text{ Avem } \overrightarrow{MO} = \frac{cV_1 + aV_3}{c+a} = \frac{cV_2 + a \overrightarrow{MD}}{c+a} \text{ și deci}$$

$$\overrightarrow{MD} = \frac{c}{a} V_1 + V_3 - \frac{c}{a} V_2 = 2V_1 - 2V_2 + V_3.$$

## TESTUL B

### I.

1. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + a, g(x) = x^2 + ax + 1$ .

a) Pentru  $a = -\frac{7}{3}$  să se rezolve ecuația  $f(2^x) = g(4^x)$ .

b) Să se arate că  $f$  este inversabilă și să se determine  $a$  știind că ecuația  $f^{-1}(g(x)) = x$  are exact două rădăcini distincte.

c) Să se afle  $a$  astfel încât ecuațiile  $f(x) = 0$  și  $g(x) = 0$  au o rădăcină reală comună.

### II.

1. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x}$ .

a) Să se determine  $a$  și  $b$  dacă funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $F(x) = (ax+b)e^{-x}$  este o primitivă a lui  $f$ .

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx$ .

c) Dacă  $f^{(n)}$  este derivata de ordin  $n$  a lui  $f$  și  $f^{(n)}(x) = 0$  să se arate că  $x = n$ .

### III.

1. Se consideră un triunghi dreptunghic  $ABC$  cu ipotenuza  $AB$  de lungime  $a$  și  $m(\angle CAB) = x$ .

a) Să se arate că dacă  $r$  este raza cercului înscris în triunghiul  $ABC$  atunci :



$$r = \frac{a}{2}(\sin x + \cos x - 1).$$

**b)** Dintre triunghiurile dreptunghice înscrise într-un cerc dat să se găsească acela cu raza cercului înscris maximă.

**2.** Față de sistemul ortogonal  $Oxyz$  se consideră punctele  $A_1(1, 2, -1)$ ,  $A_2(2, 1, 1)$  și  $A_3$ , diferit de  $O$ , în planul  $xOy$  astfel ca triunghiul  $A_1A_2A_3$  să fie echilateral.

**a)** Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$  sunt coplanari.

**b)** Să se determine unghiul format de dreapta  $A_2A_3$  cu planul  $xOy$ .

## SOLUȚII

**I.**

**1.**

**a)** Notăm  $2^x = y$  și avem  $y > 0$  și  $y^3 + y - \frac{7}{3} = y^4 - \frac{7}{3}y^2 + 1$ ,

adică  $(y-1)(y-2)(3y^2+6y+5)=0$  și deci  $y=1$  sau  $y=2$ . Rezultă  $x=0$  sau  $x=1$ .

**b)** Deoarece  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  funcția  $f$  este strict crescătoare și deci injectivă.

Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  iar  $f$  este continuă (și deci are proprietatea lui Darboux) rezultă că  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , adică  $f$  este surjectivă. Așadar  $f$  este bijectivă și deci inversabilă.

Din  $f^{-1}(g(x)) = x$  rezultă  $f(f^{-1}(g(x))) = f(x)$  adică  $g(x) = f(x)$  și deci

$$x^3 - x^2 + x - 1 + a(1 - x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 1 - a) = 0.$$

Avem  $x_1 = 1$ .

Cum ecuația are două rădăcini distincte rezultă că ecuația  $x^2 + 1 - a = 0$  are rădăcina dublă diferită de 1 sau are rădăcina 1 precum și o altă rădăcină. Avem deci cazurile  $1 - a = 0$  sau  $1 + 1 - a = 0$ . Pentru  $a = 1$  rădăcinile distincte sunt 1 și 0. Pentru  $a = 2$  avem  $x_1 = 1$  și  $x_2 = -1$ .

c) Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$  rădăcina comună. Avem  $\alpha^3 + \alpha + a = 0$  și  $\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0$ . Eliminăm  $a$  și obținem  $\alpha^4 = 1$  adică  $\alpha = \pm 1$ . Pentru  $\alpha = 1$  rezultă  $a = -2$ , iar pentru  $\alpha = -1$  rezultă  $a = 2$ .

## II.

### 1.

a) Avem  $F'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x} = xe^{-x}$  și deci  $a = b = -1$ .

$$b) \text{ Avem } I_n = \int_0^n f(x) dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_0^n = 1 - \frac{n+1}{e^n}.$$

Din lema lui Stolz rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e^n} = 0$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ .

c) Avem

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (e^{-x} \cdot x)^{(n)} = C_n^0 (e^{-x})^{(n)} x + C_n^1 (e^{-x})^{(n-1)} \cdot 1 = \\ &= (-1)^n x e^{-x} + n(-1)^{n-1} e^{-x} = (-1)^n e^{-x} (x - n). \end{aligned}$$

Avem deci  $f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow x - n = 0 \Leftrightarrow x = n$ .

## III.

### 1.

a) Fie  $A', B', C'$  punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Avem  $CB' = CA' = r$  și deci  $AB' = AC - r$ ,  $BA' = BC - r$ .

Cum

$$AB = AC' + BC' = AB' + BA' = AC + BC - 2r$$

rezultă  $r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{a \cos x + a \sin x - a}{2}$ .

b) Fie  $R$  raza cercului dat. Rezultă  $a = 2R$  și  $r = r(x) = R(\sin x + \cos x - 1)$  cu  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Avem  $r'(x) = R(\cos x - \sin x)$ . Din  $r'(x) = 0$  rezultă  $\tan x = 0$  și deci  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ . Avem  $r'(x) > 0$  pentru

$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  și  $r'(x) < 0$  pentru  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Maximul lui  $r$  se realizează în  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , deci pentru triunghiul dreptunghic isoscel.

**2.**

**a)** Fie  $A_3(a, b, 0)$ . Condițiile  $A_3A_1 = A_1A_2$ ,  $A_3A_2 = A_1A_2$  conduc la

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$(a-2)^2 + (b-1)^2 + 1^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

adică  $a^2 + b^2 = 2a + 4b = 4a + 2b$ , adică  $a = b = 0$  sau  $a = b = 3$ .

Cum  $A_3$  este diferit de 0, rezultă  $A_3(3, 3, 0)$ .

Vom arăta că punctele  $O, A_1, A_2, A_3$  sunt coplanare.

$$\text{Avem } A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Adunăm prima linie la a doua linie și avem

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Observație.** Punctele  $O, A_1, A_2, A_3$  sunt coplanare.

**b)** Fie  $B$  proiecția lui  $A_2$  pe planul  $xOy$  și  $\alpha$  măsura unghiului format de dreapta  $A_2A_3$  cu planul  $xOy$ . Avem  $\sin \alpha = \frac{A_2B}{A_2A_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}$  și deci

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

## TESTUL C

**I.**

**1.** Fie polinomul  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^n + X + 1$ ,  $n \geq 2$ .

- a) Să se determine  $n$  dacă  $f(4) = 3f(2)$ .  
 b) Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt rădăcinile lui  $f$  să se calculeze  $P = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)$ .

c) Pentru ce valori ale lui  $n$ ,  $f$  are cel puțin o rădăcină de modul 1.

2. Fie  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ .

a) Să se afle numărul elementelor mulțimii  $M$ .

b) Să se arate că  $(M, +, \cdot)$  este corp.

c) Dacă  $A \in M$  să se calculeze  $A^8$ .

## II.

1.

a) Să se arate că pentru  $x > 0$  avem

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

b) Dacă  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$  să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

c) Să se afle prima zecimală a numărului  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1 + \sin x) dx$ .

## III.

1. Pe un cerc  $C$  de rază 1 se consideră punctele  $A, B, C, D$  astfel ca  $AD = CD$ ,  $m(\angle BAD) = 105^\circ$ ,  $m(\angle ABC) = 90^\circ$ .

a) Dacă  $\overrightarrow{BA} = v_1$  și  $\overrightarrow{BC} = v_2$  să se exprime  $\overrightarrow{BD}$  în funcție de  $v_1$  și  $v_2$ .

b) Se consideră în spațiu punctul  $V$  astfel ca  $VA = VB = VC = 2$ . Să se arate că piramida  $VABCD$  admite sferă circumscrisă și să se calculeze raza acestei sfere.

2. Față de sistemul rectangular  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 2), B(-1, 1)$ .

a) Să se afle coordonatele centrului de greutate  $G$ , al triunghiului  $ABC$ .

b) Dacă  $H$  este ortocentrul triunghiului  $OAB$  și  $C$  este centrul cercului său circumscris, să se arate că punctele  $G, H, C$  sunt coliniare.

## SOLUȚII

### I.

#### 1.

a) Avem  $4^n + 5 = 3(2^n + 3) \Leftrightarrow 4^n - 3 \cdot 2^n - 4 = 0$ . Fie  $2^n = y$  și deci  $y > 0$ ,  $y^2 - 3y - 4 = 0$ , adică  $y = 4$  și deci  $n = 2$ .

b) Avem  $P = 1 + \sum x_1 + \sum x_1 x_2 + \dots + \sum x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_n$ . Din relațiile lui Viète rezultă  $P = 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n = 1$ . Altfel : avem  $1 + x_k = -x_k^n$  și deci  $P = (-1)^n (x_1 x_2 \dots x_n)^n$ . Cum  $x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n$  rezultă  $P = (-1)^n (-1)^{n^2} = (-1)^{n(n+1)} = 1$ , deoarece  $n(n+1)$  este par.

c) Fie  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  rădăcina lui  $f$  de modul 1. Avem  $\cos n\alpha + \cos \alpha + 1 + i(\sin n\alpha + \sin \alpha) = 0$  și deci  $\cos n\alpha = -1 - \cos \alpha$  și  $\sin n\alpha = -\sin \alpha$ . Ridicăm la pătrat și adunăm :  $\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha = (1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$ , adică  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$  și de aici  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Deoarece  $f$  are coeficienți reali rezultă că  $f$  admite rădăcinile

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } x_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cum  $x_1^2 + x_1 + 1 = 0$  și  $x_1^3 = 1$ , din  $f(x_1) = 0$  rezultă  $x_1^n - x_1^2 + (x_1^2 + x_1 + 1) = 0$  adică  $x_1^n - x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^{n-2} = 1$ . Punând  $n - 2 = 3k + r$  cu  $r \in \{0, 1, 2\}$ , rezultă  $(x_1^3)^k x_1^r = 1 \Leftrightarrow r = 0$  și deci  $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ .

#### 2.

a) Deoarece  $a, b \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$  rezultă că există  $3 \cdot 3 = 9$  matrice distincte.

**b)** Se arată ușor că  $(M, +, \cdot)$  este inel. Pentru ca elementul  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  să fie inversabil este necesar ca  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$  să fie inversabil în  $\mathbb{Z}_3$  adică  $a^2 + b^2 \neq \hat{0}$ . Verificăm  $a, b \in \mathbb{Z}_3$  și constatăm că  $a^2 + b^2 = \hat{0} \Leftrightarrow a = b = \hat{0}$ . Așadar  $A \neq O_2$  este inversabilă și  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  cu  $\alpha = a(a^2 + b^2)^{-1}$ ,  $\beta = -b(a^2 + b^2)^{-1}$  adică  $A^{-1} \in M$ .

**c)** Fie  $M^* = M - \{O_2\}$ . Cum  $(M^*, \cdot)$  este grup cu 8 elemente rezultă că pentru  $A \in M^*$  avem  $A_8 = I_2$ . Dacă  $A = O_2$  atunci  $A^8 = O_2$ .

## II.

### 1.

**a)** Pentru  $x > 0$  notăm  $f(x) = x - \ln(1+x)$  și  $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ ,  $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Avem  $f'(x) = \frac{x}{x+1} > 0$  și deci  $f$  este strict crescătoare adică  $f(x) > f(0) = 0$ . Deoarece  $g'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0$  rezultă analog  $g(x) > g(0) = 0$ .

**b)** Punând  $x = \frac{k}{n^2}$  rezultă  $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$ . Însușim aceste inegalități pentru  $k = 1, 2, \dots, n$  și avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^4} &< \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} &< \ln x_n < \frac{n(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Trecem la limita pentru  $n \rightarrow \infty$  și din teorema “cleștelui” obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$  și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{e}$ .

c) Avem  $\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} < \ln(1 + \sin x) < \sin x$  și deci

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} \right) dx < I < \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx, \text{ adică } \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{16} < I < \frac{1}{2} \text{ și deci}$$

$$0,5 > I > 0,5 - \frac{3,15}{2} + \frac{1,73}{2} > 0,4. \text{ Prima zecimală a lui } I \text{ este } 4.$$

### III.

#### 1.

a) Fie  $E$  intersecția dreptelor  $AC$  și  $BD$ . Avem

$$m(\angle DAC) = m(\angle DCA) = 45^\circ,$$

$$m(\angle CAB) = 60^\circ, m(\angle ACB) = 30^\circ \text{ și}$$

$\overrightarrow{AC} = v_2 - v_1$  Din teorema bisectoarei

$$\text{avem } \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ și deci}$$

$$\frac{AE}{AE + EC} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \text{ adică}$$

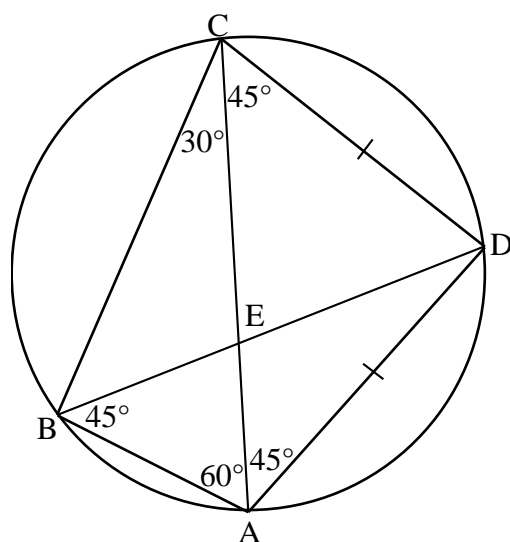
$$AE = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} AC \text{ și de aici}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (v_2 - v_1). \text{ Rezultă}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = v_1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (v_2 - v_1) = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} v_2 = \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (\sqrt{3} v_1 + v_2). \end{aligned}$$

$$\text{Din teorema sinusurilor avem } \frac{BE}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ}, \frac{BD}{\sin 105^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{și deci } \frac{BD}{BE} = \frac{4 \sin^2 75^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ adică}$$



$$\overline{BD} = \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}v_1 + v_2) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}v_1 + v_2).$$

Altfel: Punem  $\overline{BD} = \lambda v_1 + \mu v_2$  și calculăm  $\overline{BD} \cdot v_1$  și  $\overline{BD} \cdot v_2$ . Avem  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \lambda$  și  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu$ .

**b)** Fie  $O$  proiecția lui  $V$  pe planul  $ABCD$ . Cum  $VA=VB=VC$  rezultă  $OA=OB=OC$  și deci  $O$  este centrul cercului. Sfera circumscrisă conului cu vârful  $V$  și cu baza cercul  $C$ , este circumscrisă piramidei. Conul are raza  $R=1$  și generatoarea  $G=2$  și deci secțiunea sa axială este un triunghi echilateral.

Raza sferei circumscrisă este raza cercului circumscris unui triunghi echilateral de latura 2 adică  $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**2.**

**a)** Coordonatele centrului de greutate sunt

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{0+1-1}{3} = 0, y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{0+2+1}{3} = 1$$

**b)** Avem  $OA = \sqrt{(0-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$  și

$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$ , adică  $AO=AB$  și deci triunghiul este isoscel. Punctele  $C, G, H$  se găsesc pe înălțimea din  $A$  și deci sunt coliniare.

**Observație.** Această proprietate are loc pentru orice triunghi. Dreapta pe care se găsesc aceste puncte se numește *dreapta lui Euler*.

## TESTUL D

**I.**

**1.** Fie  $f = \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^n + X + 1$ .

**a)** Să se arate că  $\sqrt{f(2)}$  este irațional.

**b)** Pentru  $n=3$  se consideră  $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ , rădăcină a lui  $f$ .

Să se afle prima zecimală a numărului  $\text{Re}(\alpha)$ .



2. Fie  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ .

- a) Arătați că  $(M, +, \cdot)$  este inel comutativ ;
- b) Determinați elementele inversabile ale inelului ;
- c) Demonstrați că inelul are divizori ai lui zero.

**II.**

1. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^3 + a}{x^2 + 1}$ .

- a) Să se arate că  $f$  este inversabilă dacă și numai dacă  $a = 0$ .
- 2. Pentru  $a = 0$  să se calculeze :
  - b) Aria mărginită de graficul lui  $f$  și dreptele  $x = -2$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .
  - c)  $(f^{-1})' \left( \frac{1}{2} \right)$ .

**III.**

1. Fie un dreptunghi  $ABCD$  în care  $AB = 2, BC = 1$ . Notăm  $M$  mijlocul lui  $(AD)$  și  $N$  mijlocul lui  $DC$  :

- a) Raza cercului înscris în triunghiul  $ANB$  ;
- b) Unghiul format de dreptele  $AN$  și  $BM$ .

2. Fie un cub  $ABCD A' B' C' D'$  și  $O$  centrul său.

- a) Să se arate că  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BB'})$ .
- b) Să se calculeze unghiul format de planele  $(AB'D')$  și  $(BA'C')$ .

## SOLUȚII

### I.

#### 1.

a) Presupunem  $\sqrt{f(2)} = k \in \mathbb{N}$ . Rezultă  $2^n + 3 = k^2$  și deci  $k = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$ . Pentru  $n = 1$  avem contradicția  $5 = k^2$ . Pentru  $n \geq 2$ ,  $2^n = 4m(m+1) - 2$  și contradicția este  $4 \mid 4m(m+1) - 2$ .

b) Fie funcția  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}(x) = x^3 + x + 1$  și  $\tilde{f}(x) = 3x^2 + 1 \geq 0$ . Fiind strict crescătoare  $\tilde{f}$  este injectivă și deci se anulează cel mult o dată. Avem  $\tilde{f}(-1) = -1$ ,  $\tilde{f}(0) = 1$  și deci polinomul  $f$  are o singură rădăcină reală care este situată în  $(-1, 0)$ . Mai precis  $\tilde{f}(-0,7) = -0,343 - 0,7 + 1 < 0$  și  $\tilde{f}(-0,6) = -0,21 - 0,6 + 1 > 0$  și deci rădăcina reală  $x_1$  se află în  $(-0,7, -0,6)$ . Fie  $x_2, x_3$  celelalte rădăcini. Avem  $x_2 = \alpha$  și  $x_3 = \bar{\alpha}$ . Cum  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  rezultă  $x_1 + 2\operatorname{Re}(\alpha) = 0$  și deci  $\operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{x_1}{2} \in (0,3; 0,35)$ , adică prima zecimală a lui  $\alpha$  este 3.

#### 2.

a) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 4d & c \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

Avem  $AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 4\alpha & \alpha \end{pmatrix}$  unde  $\alpha = ac + 4bd$ ,  $\beta = ad + bc$  cu

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  și deci  $AB \in M$ . Rezultă de asemenea  $AB = BA$ . Este imediată afirmația  $A + B \in M$ . Elementele neutre se obțin pentru  $a = 0, b = 0$  și

respectiv  $a = 1, b = 0$ . Opusul lui  $\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \in M$  este  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 4(-b) & -a \end{pmatrix} \in M$ .

Ținând seama că  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  este inel și  $M \subset M_2(\mathbb{R})$  rezultă că și  $(M, +, \cdot)$  este inel (subinel al lui  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ).

b) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ . Dacă  $\det A = a^2 - 4b^2 \neq 0$ , adică  $a \neq \pm 2b$

atunci  $A$  este inversabilă. Avem

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - 4b^2} & \frac{-b}{a^2 - 4b^2} \\ \frac{-4b}{a^2 - 4b^2} & \frac{a}{a^2 - 4b^2} \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$A^{-1} \in M \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 - 4b^2} \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{-b}{a^2 - 4b^2} \in \mathbb{Z}.$$

Cum  $\left(\frac{a}{a^2 - 4b^2}\right)^2 - 4\left(\frac{-b}{a^2 - 4b^2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 - 4b^2)^2} = \frac{1}{a^2 - 4b^2}$  rezultă că este necesară condiția  $a^2 - 4b^2 \mid 1$ , adică  $(a - 2b)(a + 2b) = \pm 1$ . Rezultă  $b = 0$  și  $a = \pm 1$ . Elementele inversabile sunt  $I_2$  și  $-I_2$ .

c) Cu notațiile de la a) punem  $\alpha = 0, \beta = 0$ . Putem lua, de exemplu,  $a = 2b$  și  $c = 2d$  și avem  $AB = 0_2$ , adică  $A$  și  $B$  sunt divizori ai lui zero.

## II.

### 2.

a) Avem  $f' = \frac{x(x^3 + 3x - 2a)}{(x^2 + 1)^2}$ . Cum  $f$  este continuă, injectivitatea

este echivalentă cu stricta monotonie. Pentru ca  $f'$  să nu-și schimbe semnul în 0 este necesar ca ecuația  $x^3 + 3x - 2a = 0$  să aibă rădăcina 0, adică  $a = 0$ . Rezultă  $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$ , adică  $f$  este strict crescătoare,

adică injectivă. Avem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  și cum  $f$  este continuă, rezultă  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  și deci este și surjectivă.

b) Avem  $A = \int_{-2}^0 \frac{-x^3}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$ . Cum  $\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$

$$\text{rezultă } A = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{5 - \ln 10}{2}.$$

c) Din  $f(x)=0$  adică  $\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{1}{2}$  rezultă  $x=1$  și deci

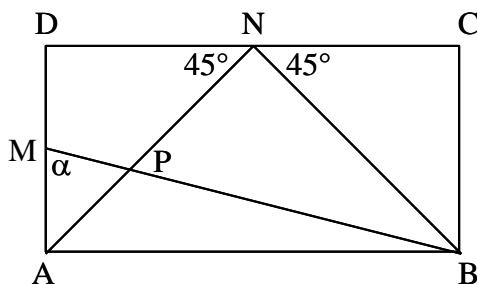
$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(1)}=1.$$

### III.

#### 1.

a) Triunghiurile  $ADN$  și  $BCN$  sunt dreptunghice isoscele și deci

$$m\left(\hat{DNA}\right)=m\left(\hat{CNB}\right)=45^0. \text{ Rezultă de aici } m\left(\hat{ANB}\right)=90^0 \text{ și}$$

$$AN=BN=2\sqrt{2}. \text{ Avem } r=\frac{S}{p}=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=2(2-\sqrt{2}).$$


b) Fie  $P$  intersecția dreptelor  $AN$  și  $BM$ . Notăm  $\alpha = m\left(\hat{AMP}\right)$  și

avem  $tg \alpha = \frac{AB}{AM} = 4.$

Deoarece  $m\left(\hat{PAM}\right)=45^0$  rezultă  $m\left(\hat{APM}\right)=180^0-45^0-\alpha$  și

decă  $tg\left(\hat{APM}\right)=tg\left(135^0-\alpha\right)=\frac{tg\ 135^0-tg\ \alpha}{1+tg\ 135^0tg\ \alpha}=\frac{-1-4}{1-4}=\frac{5}{3},$  adică

unghiul dintre dreptele  $AN$  și  $BM$  are măsura  $arctg\ \frac{5}{3}.$

2.

a) Avem  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'})$ . Cum  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  și  $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}$  rezultă relația din enunț.

b) Considerăm sistemul rectangular  $AB'DA'$  și latura cubului de lungime 1. Vârfurile cubului au coordonatele  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $A'(0, 0, 1)$ ,  $B'(1, 0, 1)$ ,  $C'(1, 1, 1)$ ,  $D'(0, 1, 1)$ .

Fie  $ax + by + cz + d = 0$  ecuația unui plan. Dacă punctele  $A, B', D'$  se găsesc în acest plan avem  $d = 0$ ,  $a + c = 0$ ,  $b + c = 0$  și deci  $a = -c$ ,  $b = -c$  și ecuația planului  $(AB'D')$  este

$$-x - y + z = 0 \quad (1)$$

Considerăm planul ce trece prin  $B, A', C'$  și avem  $a + d = 0$ ,  $a + b + c + d = 0$ ,  $c + d = 0$ , adică  $a = -d$ ,  $b = d$ ,  $c = -d$  și ecuația planului este

$$-x + y - z = 1 \quad (2)$$

Dacă  $\alpha$  este măsura unghiului dintre planele  $(AB'D')$  și  $(BA'C')$  avem

$$\cos \alpha = \frac{|(-1)(-1) + (-1)(1) + (1)(-1)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

și deci  $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ .

## TESTUL E

I. Fie  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se determine toate polinoamele  $P \in \mathbb{R}[X]$  având proprietatea

$$(X - n)P(X + 1) - XP(X) + na = 0.$$

II. Se consideră șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definit prin  $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$ ,  $x_0 \in [0, 3]$ . Să se arate că :

a) Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este monoton, mărginit și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

b) Pentru orice  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k (3 - x_n) = 0$ .

**III.** Se consideră piramida  $ABCD$  în care  $DA = AB = 3$  și  $m(\angle DAB) = m(\angle DAC) = 90^\circ$ ,  $m(\angle BAC) = 60^\circ$ ,  $m(\angle BDC) = 45^\circ$ .

**a)** Să se arate că  $AC = 4$ .

**b)** Să se calculeze volumul piramidei și raza sferei înscrisă în piramidă.

## SOLUTII

**I.** Considerând egalitatea din enunț pentru funcțiile polinomiale asociate și înlocuind succesiv pe  $x$  cu  $0, 1, \dots, n-1$  se obține  $P(1) = \dots = P(n) = a$ . Polinomul  $P$  este deci de forma  $T(X)(X-1)\dots(X-n) + a$  unde  $T \in \mathbb{R}[X]$ . Relația din ipoteză devine :

$$T(X+1)(X-1)\dots(X-n) - T(X)(X-1)\dots(X-n) = 0.$$

Rezultă că  $T(X+1) = T(X)$  și de aici că  $T$  este constant și deci polinoamele din enunț sunt de forma  $b(X-1)\dots(X-n) + a$  unde  $b \in \mathbb{R}$ .

## **II.**

**a)** Presupunând prin inducție că  $x_n \in [0, 3]$  rezultă că  $0 \leq 3 + 2x_n \leq 9$  și deci  $x_{n+1} \in [0, 3]$ . S-a demonstrat deci că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit.

Avem apoi  $x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_n + 1)(3 - x_n)$ . Din etapa precedentă rezultă atunci că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este crescător. Fiind monoton și mărginit șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent. Trecând la limită în relația  $x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}$  se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ .

**b)** Se poate arăta că  $0 \leq 3 - x_n \leq 3 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### III.

a) Notăm  $AC = x$  și avem  $DC = \sqrt{x^2 + 9}$ ,  $BD = 3\sqrt{2}$ . Din teorema cosinusurilor aplicată în triunghiurile  $ABC$  și  $DBC$  obținem:

$$BC^2 = 9 + x^2 - 3x,$$

$$BC^2 = 18 + x^2 + 9 - 6\sqrt{x^2 + 9}.$$

Rezultă că  $3x + 18 = 6\sqrt{x^2 + 9}$  și deci  $x = 4$ .

b) Aria  $(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$  și volumul este  $V = 3\sqrt{3}$ . Deoarece  $BC = \sqrt{13}$ , cu formula lui Heron în triunghiul  $BCD$  obținem aria  $(BCD) = \frac{15}{2}$ . Aria totală a piramidei este  $S = 12 + \frac{1}{2}(6\sqrt{3} + 9\sqrt{2})$ . Raza sferei înscrise rezultă din relația  $r = \frac{3V}{S}$ .

### TESTUL F

I. Pe  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  se consideră operațiile

$$(z, w) + (u, v) = (z + u, w + v)$$

$$(z, w) \cdot (u, v) = (zu - w\bar{v}, zv + w\bar{u})$$

a) Să se arate că  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, +, \cdot) = K$  este un corp necomutativ.

b) Să se calculeze  $(\cos \theta, \sin \theta)^n$ .

II. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \text{daca } x \neq 0, \\ 0 & , \text{daca } x = 0. \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .

b) Fie  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  șirul definit prin  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent.

**III.** În triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  se notează  $B'C'$  proiecțiile lui  $B$  pe  $AC$  și a lui  $C$  pe  $AB$ . Fie  $H$  ortocentrul și  $R$  raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ . Să se arate că :

**a)**  $AH = 2R \cos A$ ,  $B'C' = R \sin 2A$

**b)** Dacă  $AH + B'C' = BC$ , atunci  $m(\angle BAC) < 75^\circ$ .

## SOLUȚII

### I.

**a)** Este ușor de arătat că  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, +)$  este un grup comutativ în care elementul neutru este  $(0, 0)$ . Se verifică direct că legea „ $\cdot$ ” este asociativă. Deoarece  $(u, v) \cdot (z, w) = (zu - \bar{v}\bar{w}, zv + w\bar{u})$  rezultă că operația „ $\cdot$ ” nu este comutativă. Față de această lege  $(1, 0)$  este element neutru și  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, +, \cdot)$  este inel necomutativ. Pentru a stabili elementele inversabile față de înmulțire se ajunge la sistemul

$$\begin{cases} uz - \bar{v}w = 1 \\ vz + \bar{u}w = 0 \end{cases}$$

În raport cu necunoscutele  $z, w$  sistemul are determinantul  $|u|^2 + |v|^2$ . Rezultă că dacă  $(u, v) \neq (0, 0)$  sistemul are soluție unică și deci

$$(u, v)^{-1} = \left( \frac{\bar{u}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{-v}{|u|^2 + |v|^2} \right)$$

**b)**  $\mathbb{C}$  este izomorf cu un subcorp al lui  $K$ .



## II.

a) Este evident că funcția  $f$  este continuă în zero și deci continuă pe  $\mathbb{R}$ . Deoarece nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ , funcția nu este derivabilă în zero.

b) Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător și deci convergent. Convergența șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rezultă din continuitatea funcției  $f$ , din care rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(|x_n|) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|)$ , și observația  $f(x) = f(|x|)$ .

## III.

a) Fie  $a, b, c$  lungimile laturilor triunghiului  $ABC$ . Avem  $AC' = b \cos A$ . Cum  $m(\angle AHC') = m(\hat{B})$  avem

$$AH = \frac{AC'}{\sin B} = \frac{b \cos A}{\sin B} = \frac{2R \sin B \cos A}{\sin B} = 2R \cos A$$

Patrulaterul  $ABHC'$  este inscriptibil și deci  $AH$  este diametrul cercului circumscris triunghiului  $AB'C'$ . Avem  $\frac{B'C'}{\sin A} = AH$  și deci  $B'C' = 2R \cos A \sin A = R \sin 2A$ .

b) Avem relația  $2R \cos A + R \sin 2A = a = 2R \sin A$  și deci  $\sin A - \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A$ . Notăm  $\sin A - \cos A = x$  și avem  $\sin^2 A + \cos^2 A - \sin 2A = x^2$ . Atunci  $\sin 2A = 1 - x^2$  și deci  $2x = 1 - x^2$ . Rezultă că  $x = -1 + \sqrt{2}$ , adică  $\sin A - \cos A = \sqrt{2} - 1$ . De aici  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin A - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos A = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$  de unde  $0 < \sin(A - 45^\circ) < \frac{1}{2}$  Atunci  $A - 45^\circ < 30^\circ$ .

## TESTUL G

### I.

a) Fie  $a$  un număr real. Să se arate că dacă  $a \neq 0$ , atunci există  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$  astfel încât  $|z + a| > 1$ .

**b)** Fie  $a_1, \dots, a_n$  numere reale astfel încât

$$|z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq 1$$

pentru orice număr complex  $z$  de modul 1. Să se arate că  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

**II.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \int_0^1 x \cos tx \, dx$ .

**a)** Să se arate că

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t - 1}{t^2} & , \text{daca } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \text{daca } t = 0 \end{cases}.$$

**b)** Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .

**c)** Să se arate că  $\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{3}t$  pentru orice  $t \in [0, 1]$ .

**III.** Fie  $H$  hiperbola de ecuație  $4x^2 - 9y^2 = 1$ .

**a)** Să se arate că pe  $H$  nu există puncte având ambele coordonate întregi.

**b)** Să se determine ecuațiile tangentelor la hiperbolă perpendiculare pe dreapta  $3x + 4y + 1 = 0$ .

## SOLUȚII

### I.

**a)** Se poate lua  $z = i$ .

**b)** Pentru  $n = 2$  ipoteza este  $|z^2 + a_1 z + a_2| \leq 1$  pentru orice  $z \in \mathbb{C}$  cu  $|z| = 1$ . Înlocuind  $z$  cu  $iz$  rezultă că  $|-z^2 + a_1 iz + a_2| \leq 1$  pentru orice număr complex  $z$  cu  $|z| = 1$ . Atunci  $|2z^2 + a_1(1-i)z| \leq 2$  pentru orice număr complex  $z$  cu  $|z| = 1$ , de unde rezultă că  $\left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} z + \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \right| \leq 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  cu  $|z| = 1$ . Din **a)** rezultă că  $a_1 = 0$ . Ipoteza devine  $|z^2 + a_2| \leq 1$  pentru orice număr complex  $z$  cu  $|z| = 1$ , ceea ce este echivalent cu a spune că  $|z + a_2| \leq 1$  pentru orice  $z$  cu  $|z| = 1$ . Din **a)** rezultă că  $a_2 = 0$ . Demonstrația se continuă apoi prin inducție folosind ideile precedente (se va utiliza o rădăcină complexă de ordinul  $n$  a lui  $-1$ ).

## II.

**a)** Pentru  $t \neq 0$  se face schimbarea de variabilă  $tx = s$  și obținem  $f(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t s \cos s \, ds$ . Integrând apoi prin părți rezultă că  $f(t) = \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t - 1}{t^2}$ .

**b)** Pentru  $t \neq 0$  avem  $f'(t) = \frac{t^2 \cos t - 2t \sin t + 2 - 2 \cos t}{t^3}$ . Atunci  $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 0$  și dintr-o consecință a teoremei lui Lagrange rezultă că  $f$  este derivabilă în zero și  $f'(0) = 0$ .

**c)**  $f'(t) = -\int_0^1 x^2 \sin tx \, dx$ .

## III.

**a)** Presupunem că există  $a, b \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $4a^2 - 9b^2 = 1$ . Rezultă că  $b$  este impar adică  $b = 2c + 1$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ . Atunci  $4a^2 = 9(2c + 1)^2 + 1 = 36c^2 + 36c + 10$ .

Relația ce rezultă :  $2a^2 = 18c(c+1) + 5$  este contradictorie.

**b)** Panta dreptei este  $-\frac{3}{4}$  și deci panta tangentei este  $\frac{4}{3}$ .

Intersectăm dreptele  $y = \frac{4}{3}x + n$  cu hiperbola și obținem ecuația  $4x^2 - (4x + 3n)^2 = 1$  echivalentă cu  $12x^2 + 24xn + 9n^2 + 1 = 0$ . Ecuațiile tangentelor se obțin dacă rădăcinile acestei ecuații sunt egale, deci dacă  $36n^2 - 12 = 0$ . Tangentele au deci ecuațiile  $y = \frac{4}{3}x \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2000**

**I.**

1. Să se determine funcția de gradul al doilea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , știind că admite un minim egal cu 9 și graficul său trece prin punctele  $A(-1, 13)$  și  $B(2, 10)$ .

2. Fie ecuația  $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$  și  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile sale. Să se calculeze  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$  și determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

**II.**

1. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

2. Se consideră funcția  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = x(\ln x)^2$ .

a) Să se calculeze derivata funcției  $f$  și să se arate că  $0 < f(x) < 1$  pentru orice  $x \in (0, 1)$ .

b) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin relația de recurență  $x_{n+1} = x_n^2 (\ln x_n)^2$  cu  $x_0 \in (0, 1)$  este convergent și să se calculeze limita sa.

### III.

#### 1.

i) Să se enunțe teorema sinusurilor într-un triunghi  $ABC$ .

ii) Fie  $ABCD$  un romb circumscris cercului  $C(O, R)$ . Considerăm o tangentă variabilă la cercul  $C(O, R)$ , care intersectează laturile  $[AB]$  și  $[AD]$  în punctele  $M$  și respectiv  $N$ . Să se arate că produsul  $BM \cdot DN$  este constant.

2. Se consideră piramida  $[VABCD]$  unde  $ABCD$  este dreptunghi,  $\{O\} = AC \cap BD$ ,  $VO \perp (ABC)$ .

i) Să se afle aria laterală, aria totală și volumul piramidei, știind că  $AB = a$ ,  $BC = b$  și  $VO = h$ .

ii) Un plan oarecare intersectează muchiile laterale ale piramidei în punctele  $A' \in (VA)$ ,  $B' \in (VB)$ ,  $C' \in (VC)$  și  $D' \in (VD)$ . Să se arate că

$$\frac{1}{VA'} + \frac{1}{VC'} = \frac{1}{VB'} + \frac{1}{VD'}.$$

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA IULIE 2000

**Subiectele I și II** coincid cu cele de la Facultatea de Matematică

### Subiectul III

1. Să se calculeze  $\int_0^1 x e^x dx$ .

2. Fie  $a$  un număr strict pozitiv. Se consideră șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin  $x_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}$ . Să se arate că acest șir este strict monoton, mărginit și să se calculeze limita sa.

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ SESIUNEA IULIE 2000

#### I.

1. Prima condiție este  $\frac{-\Delta}{4a} = 9$ , adică  $4ac - b^2 = 36a$  (1). Condițiile

$f(-1) = 13$  și  $f(2) = 10$  devin  $a - b + c = 13$  (2),  $4a + 2b + c = 10$  (3).

Din relațiile (2) și (3) obținem  $b = -1 - a$ ,  $c = 12 - 2a$ . Înlocuind în (1) obținem  $9a^2 - 10a + 1 = 0$ . Avem soluțiile  $a = 1, b = -2, c = 10$  și  $a = \frac{1}{9}, b = -\frac{10}{9}, c = \frac{106}{9}$ .

2. Din relațiile lui Viète obținem :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \text{ și } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2.$$

Rezultă de aici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 4 - 4 = 0.$$

Apoi  $x_1, x_2, x_3$  verifică ecuația dată, adică

$$x_1^3 - 2x_1^2 + 2x_1 + 17 = 0; x_2^3 - 3x_2^2 + 2x_2 + 17 = 0; x_3^3 - 3x_3^2 + 2x_3 + 17 = 0.$$

Prin urmare avem  $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 51 = 0$  și de aici

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -55.$$

Pentru determinant adunăm toate liniile la prima și ținem seama că  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ . Obținem

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 - x_2 & x_1 - x_2 \\ x_3 & x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \end{vmatrix} = \\ &= 2(-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 4. \end{aligned}$$

Dacă se dezvoltă determinantul după regula lui Sarrus obținem

$$\Delta = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

Deoarece  $x_1x_2x_3 = -17$ , rezultă  $\Delta = -51 + 55 = 4$ .

## II.

1. Avem  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ ,

$f''(x) = 2 \frac{1 - 3x^2}{(x^2 + 1)^3}$ . Tabelul de variație al funcției  $f$  este

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\infty$
$f'(x)$	1 ↘	$\frac{1}{4}$ ↘	0 ↗	$\frac{1}{4}$ ↗	1
$f(x)$	- - - -	0	+ + + +	0	- - - -
$f''(x)$	∩	$\frac{1}{4}$	∪	$\frac{1}{4}$	∩

Graficul lui  $f$  admite asimptota orizontală  $y = 1$  pentru  $x \rightarrow \pm\infty$ , punctul de minim  $(0, 0)$  și punctele de inflexiune  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$  și  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$ .

Graficul este prezentat în fig. 1.

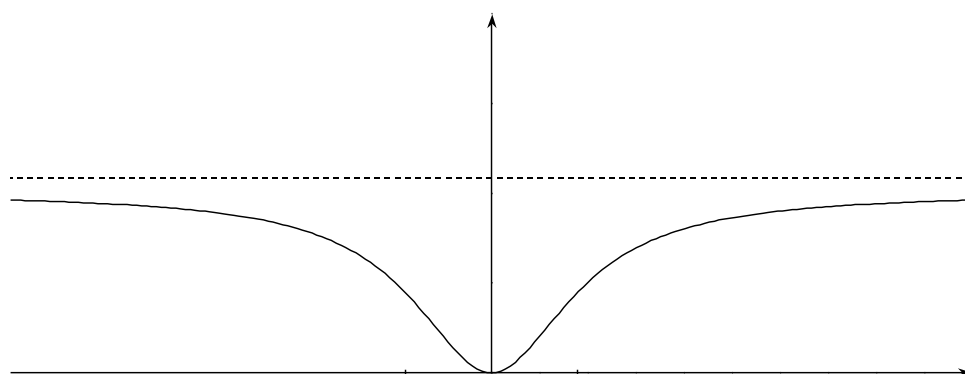


Fig. 1.

## 2.



a) Avem  $f'(x) = \ln x (\ln x + 2)$  și  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$  și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x (\ln x)^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x = 0.$$

Tabelul de variație al funcției  $f$  este

$x$	0	$\frac{1}{e^2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{4}{e^2}$	0

Cum  $\frac{4}{e^2} < 1$  rezultă că  $0 < f(x) < 1$ .

b) Relația de recurență se mai scrie  $x_{n+1} = x_n f(x_n)$ . Deoarece  $x_0 \in (0,1)$  și  $f(x_n) \in (0,1)$  rezultă că  $x_1 \in (0,1)$  și prin inducție obținem că  $x_n \in (0,1)$ . Pentru studiul monotoniei calculăm diferența  $x_{n+1} - x_n = x_n (f(x_n) - 1)$ . Cum  $x_n \in (0,1)$  și  $f(x_n) \in (0,1)$  rezultă  $x_{n+1} < x_n$ . După demonstrarea existenței limitei  $L$  prin trecerea la limită în relația de recurență  $L(1 - f(L)) = 0$  și deci  $L = 0$  deoarece  $f(L) < 1$ .

### III.

#### 1.

i) În orice triunghi  $ABC$  avem :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

notațiile fiind cele consacrate.

ii) Fie  $E, F, G$  punctele de tangență ale cercului cu  $AB, MN$  și  $AD$ . Notăm

$$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle DOG) = \alpha ;$$

$$m(\sphericalangle EOM) = m(\sphericalangle FOM) = x ;$$

$$m(\sphericalangle FON) = m(\sphericalangle GON) = y .$$

Avem  $2x + 2y + 2\alpha = \pi$  și  $m(\sphericalangle OBM) = m(\sphericalangle ODN) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Rezultă

$$m(\sphericalangle OMB) = \alpha + y = m(\sphericalangle DON) \text{ și } m(\sphericalangle OND) = \alpha + x = m(\sphericalangle BOM) .$$

Deducem  $\triangle BOM \sim \triangle DMO$  și deci  $\frac{BM}{OD} = \frac{OB}{ND}$  de unde  $BM \cdot DN = OB^2$ .

2.

$$i) \text{ vol } (VABCD) = \frac{abh}{3} \cdot A_{lat} [VABCD] = a\sqrt{\frac{b^2}{4} + h^2} + b\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} .$$

ii) Fie  $V', A'', O'$  și  $C''$  proiecțiile lui  $V, A, O$  și  $C$  pe planul  $A'B'C'D'$ . Din asemănare rezultă  $\frac{CC'}{VC'} = \frac{CC''}{VV'}$  și  $\frac{AA'}{VA'} = \frac{AA''}{VV'}$  și prin adunare, membru cu membru, a celor două egalități avem  $\frac{AA'}{VA'} + \frac{CC'}{VC'} = \frac{AA'' + CC''}{VV'}$ . Din teorema liniei mijlocii aplicată trapezului

$$AA''C''C \text{ rezultă } AA'' + CC'' = 2OO' \text{ și deci } \frac{AV - VA'}{VA'} + \frac{CV - VC'}{VC'} = \frac{2OO'}{VV'}$$

și cum  $AV = CV = m$  rezultă  $\frac{1}{VA'} + \frac{1}{VC'} = \frac{1}{m} \left( \frac{2OO'}{VV'} + 2 \right)$ .

$$\text{Analog se arată că } \frac{1}{VB'} + \frac{1}{VD'} = \frac{1}{m} \left( \frac{2OO'}{VV'} + 2 \right) .$$

**Altă soluție.** Într-un triunghi  $ABC$  bisectoarea din  $A$  are lungimea

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} . \text{ Așadar,}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{l_a} .$$

Notăm  $E'$  intersecția lui  $VO$  cu planul  $A'B'C'D'$ . În triunghiul  $VA'C'$ ,  $VE$  este bisectoare și rezultă  $\frac{1}{VA'} + \frac{1}{VC'} = \frac{2 \cos \frac{\angle AVC}{2}}{VE}$ .

Analog din triunghiul  $VB'D'$  obținem  $\frac{1}{VB'} + \frac{1}{VD'} = \frac{2 \cos \frac{\angle BVD}{2}}{VE}$ .

Cum  $\angle AVC \equiv \angle BVD$  rezultă  $\frac{1}{VA'} + \frac{1}{VB'} = \frac{1}{VC'} + \frac{1}{VD'}$ .

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA IULIE 2000

### Subiectul III

1. Integrând prin părți obținem

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

2. Amplificând cu  $\sqrt{n+a} + \sqrt{n}$  avem

$$x_n = \frac{n+a-n}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = \frac{a}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}}.$$

Șirul  $(\sqrt{n+a} + \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  este strict crescător și cu termeni pozitivi și deci  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este strict descrescător. Rezultă de aici că  $x_1 \geq x_n > 0$  și deci șirul este mărginit. Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+a} + \sqrt{n}) = \infty$  rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2001**

**I.**

1. Se dă polinomul  $f = X^4 + aX^3 + bX + c$ , unde  $a, b, c$  sunt numere reale.

i) Să se arate că nu există valori ale lui  $a, b, c$  astfel încât  $f$  să se dividă cu  $X^3 - X$ .

ii) Dacă  $f(0) = f(1)$ , să se determine  $a, b, c$  astfel ca polinomul să aibă rădăcina  $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  și apoi, să se afle celelalte rădăcini.

iii) Dacă  $g$  este câtul împărțirii polinomului determinat la punctul ii) prin  $X^2 - X - 2$ , să se calculeze suma  $g(1) + g(2) + \dots + g(n)$ , unde  $n$  este număr natural.

**2.**

i) Să se arate că dacă  $x \neq \frac{1}{2}$ ,  $y \neq \frac{1}{2}$  sunt numere reale, atunci

$$xy + (1-x)(1-y) \neq \frac{1}{2}.$$

ii) Fie  $G = \left\{ A_x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$ , unde

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Să se arate că  $G$  este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

## II.

1. Fie  $a$  un număr real strict pozitiv și  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \frac{x^2 + a^2}{2x}$$

i) Să se studieze monotonia funcției  $f$ .

ii) Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin relația  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a^2}{2x_n}$ ,

unde  $x_0 > a$ .

iii) Să se studieze monotonia și convergența șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Să se calculeze limita șirului. Ce se poate spune dacă  $0 < x_0 \leq a$ ?

2. Fie  $n \geq 0$  un număr natural și fie  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

i) Să se calculeze  $I_1$  și  $I_2$ ;

ii) Să se stabilească legătura între  $I_n$  și  $I_{n+1}$ ;

iii) Să se arate că  $I_n \leq e - 1$  pentru orice  $n \geq 0$ .

## III.

1. În planul  $xOy$  se consideră punctele  $A(4,4)$ ,  $B(1,0)$  și  $C(0,\lambda)$  unde  $\lambda$  este un parametru real.

i) Să se determine  $\lambda$  astfel încât  $AB = AC$ ;

ii) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  pentru toate valorile lui  $\lambda$  determinate mai sus.

2. Fie  $[ABCD]$  un tetraedru regulat și  $M$  un punct variabil în interiorul tetraedrului.

i) Să se arate că suma distanțelor punctului  $M$  la fețele tetraedrului este constantă.

ii) Să se calculeze volumul tetraedrului  $[ABCD]$  și raza sferei înscrise în tetraedru știind că  $AB = a$ .

**COLEGIUL DE INFORMATICĂ  
SESIUNEA IULIE 2001**

**I.**

1. Se dă polinomul  $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + nX + p$ , unde  $m, n, p$  sunt numere reale.

i) Să se determine  $m, n$  și  $p$  astfel încât restul împărțirii lui  $f$  la  $X - 1$  să fie  $-15$ , iar polinomul  $f$  să admită rădăcina  $-1 + i$ .

ii) Pentru valorile lui  $m, n$  și  $p$  de la punctul i), să se afle rădăcinile polinomului  $f$ .

2. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

i) Să se calculeze  $A^2, A^3, A^{302}$ ;

ii) Să se arate că mulțimea  $G = \{I_2, A, A^2\}$  formează grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor, unde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Se dă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^n + y = 12 \end{cases}$$

unde  $n$  este un număr natural nenul.

Să se determine valorile lui  $n$  astfel încât sistemul să aibă soluții numere întregi și apoi să se rezolve sistemul.

**II.**

1. Să se reprezinte grafic funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

2. Să se calculeze integrala  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

**FACULTATEA DE MATEMATICĂ  
SESIUNEA SEPTEMBRIE 2001**

**I.**

1. Fie ecuația  $x^2 + px + q = 0$  unde  $p$  și  $q$  sunt numere complexe  $q \neq 0$ . Notăm cu  $x_1$  și  $x_2$  rădăcinile ecuației.

i) Să se calculeze în funcție de  $p$  și  $q$  expresiile :

$$x_1^2 + x_2^2, \quad x_1^3 + x_2^3, \quad x_1^4 + x_2^4.$$

ii) Să se formeze o ecuație de gradul al doilea ale cărei rădăcini sunt  $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$  și  $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ .

iii) Să se arate că dacă  $|x_1| = |x_2| = 1$ , atunci și rădăcinile ecuației  $x^2 + |p|x + |q| = 0$  au modulul egal cu 1.

2. Fie  $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ .

i) Să se arate că dacă  $x, y \in G$ , atunci  $x^{\ln y} \in G$ .

ii) Să se arate că  $G$  este grup comutativ în raport cu legea de compoziție  $*$  definită prin  $x * y = x^{\ln y}$ , pentru orice  $x, y \in G$ .

## II.

1. Fie  $a$  și  $b$  două numere reale. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{daca } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{daca } x > 1 \end{cases}.$$

i) Să se determine o relație între  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă.

ii) Să se determine  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $f$  să fie derivabilă.

## 2.

i) Fie  $a$  un număr real. Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx.$$

ii) Să se demonstreze că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$f(a) = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx$$

este continuă.

## III.

1. Fie  $ABCD$  un patrulater cu diagonalele perpendiculare, înscris într-un cerc de centru  $O$  și rază  $R$ .

i) Să se arate că  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2$ .

ii) Să se demonstreze că oricare ar fi punctele  $E \in (AB)$ ,  $F \in (BC)$ ,  $J \in (CD)$  și  $K \in (AD)$  are loc inegalitatea

$$OE^2 + OF^2 + OJ^2 + OK^2 \geq 2R^2.$$

iii) Să se determine punctele  $E, F, J, K$  pentru care inegalitatea de mai sus devine egalitate.



2. Fie elipsa de ecuație  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

i) Să se scrie ecuația tangentei la elipsă care trece prin punctul  $M\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  de pe elipsă.

ii) Să se determine ecuațiile tangențelor la elipsă duse din punctul  $P(1,1)$ .

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ

### SESIUNEA IULIE 2001

#### I.

##### 1.

i) Dacă  $X^3 - X$  divide  $f$  atunci  $f(1)=0, f(-1)=0$  și  $f(0)=0 \Leftrightarrow 1+a+b+c=0; 1-a-b+c=0$  și  $c=0$ . Din adunarea primelor două relații avem  $c=-1$ , contradicție.

ii) Din  $f(0)=f(1)$  rezultă  $a+b=-1$ . Deoarece  $f \in \mathbb{R}[X]$  rezultă că și  $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$  este rădăcină pentru  $f$  și deci  $f$  se divide la

$$\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = X^2 - X + 1. \quad \text{Se obține câtul}$$

$X^2 + (a+1)X + a$  și restul  $(b-1)X + c - a$ . Cum  $X^2 - X + 1$  divide  $f$  rezultă  $b-1=0, c-a=0$ . Rezultă  $a=-2, b=1, c=-2$ . Câtul este deci  $X^2 - X - 2$  și deci celelalte rădăcini sunt -1 și 2.

iii) Câtul este  $X^2 - X + 1$ . Avem

$$\sum_{k=1}^n g(k) = \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n^2 + 2)}{2}.$$

2.

i) Dacă, prin absurd,  $xy + (1-x)(1-y) = \frac{1}{2}$ , atunci

$(1-2x)(1-2y) = 0$ , de unde  $x = \frac{1}{2}$  sau  $y = \frac{1}{2}$ , contradicție.

ii) Fie  $A_x = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix}$  și  $A_y = \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix}$  cu  $x \neq \frac{1}{2}$

și  $y \neq \frac{1}{2}$  două elemente din  $G$ . Cum

$$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1-(x+y-2xy) & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-(x+y-2xy) \end{pmatrix}$$

și  $1-x-y+2xy \neq \frac{1}{2}$  (din pct. i)) rezultă că  $A_x \cdot A_y = A_{1-x-y+2xy} \in G$ .

Deoarece înmulțirea matricelor este asociativă rezultă că operația lui  $G$  este asociativă. Este clar că  $A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x$  și deci operația este

comutativă. Dacă punem  $y=1$ , avem  $A_x \cdot A_1 = A_x$  și deci  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

este elementul neutru al lui  $G$ . Cum ecuația  $1-x-y+2xy=1$ , în raport

cu  $y$ , are soluția  $y = \frac{x}{2x-1} \neq \frac{1}{2}$  (când  $x \neq \frac{1}{2}$ ) rezultă că simetricul

elementului  $A_x$  este matricea  $A_{\frac{x}{2x-1}}$ .

## II.

### 1.

i) Avem  $f'(x) = \frac{x^2 - a^2}{2x^2}$  și deci  $f$  este descrescătoare pe  $[0, a]$  și crescătoare pe  $[a, \infty)$ .

ii) și iii) Prin inducție se arată că  $x_n > 0$  pentru orice  $n$ . Avem  $x_{n+1} - a = \frac{x_n^2 + a^2}{2x_n} - a = \frac{(x_n - a)^2}{2x_n} \geq 0$ . Cum  $x_n > 0$  rezultă  $x_n \geq a$  pentru orice  $n \geq 1$ . Avem de asemenea  $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + a^2}{2x_n} - x_n = \frac{a^2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$  și deci șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este descrescător. Deoarece  $x_n \in (0, x_1)$  rezultă convergența lui  $(x_n)_{n \geq 1}$ . Prin trecere la limită în relația de recurență, rezultă că limita șirului este  $a$ . Dacă  $x_0 = a$ , atunci șirul este constant, egal cu  $a$ . Dacă  $0 < x_0 < a$ , atunci  $x_1 > a$  și se ajunge la cazul precedent.

### 2.

i) Integrând prin părți se obține  $I_1 = 1$  și  $I_2 = e - 2$ .

ii) Integrând prin părți avem succesiv

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx = e - (n+1) I_n.$$

iii) Deoarece  $x \in [0, 1]$  avem  $x^n \leq 1$  și integrând rezultă

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

## III.

### 1.

i) Avem  $AB = 5$  și  $AC = \sqrt{(\lambda - 4)^2 + 16}$  și deci

$$\begin{aligned} AB = AC &\Leftrightarrow \sqrt{(\lambda - 4)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda - 4 = \pm 3 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ sau } \lambda = 7. \end{aligned}$$

*ii)* Cum aria unui triunghi este  $S = \frac{1}{2}|\Delta|$  unde  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

obținem pentru  $\lambda = 1, S = \frac{7}{2}$ , iar pentru  $\lambda = 7, S = \frac{25}{2}$ .

**2.**

*i)* Avem

$$\text{vol}[ABCD] \equiv \text{vol}[MABC] + \text{vol}[MABD] + \text{vol}[MACD] + \text{vol}[MBCD].$$

Cum fețele tetraedrului au arii egale notate cu  $S$  rezultă că

$$\begin{aligned} d(D, (ABC)) &= d(M, (ABC)) + d(M, (ABD)) + \\ &+ d(M, (ACD)) + d(M, (BCD)) \end{aligned}$$

ceea ce arată că suma căutată este egală cu înălțimea tetraedrului.

*ii)* Înălțimea tetraedrului este  $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Volumul este

$$\text{vol}[ABCD] = \frac{1}{3} \text{aria}[ABC] \cdot h = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Fie  $I$  centrul sferei înscrise în tetraedru. Distanțele sale la fețele tetraedrului sunt egale cu raza  $r$  a sferei. Conform *i)* avem  $4r = h$  și deci

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

**COLEGIUL DE INFORMATICĂ  
SESIUNEA IULIE 2001**

**I.**

**1.**

*i)* Cum  $f \in \mathbb{R}[X]$  din  $f(-1+i)=0$  rezultă și  $f(-1-i)=0$ , deci  $f$  se divide cu  $(X+1-i)(X+1+i)=(X+1)^2+1=X^2+2X+2$ . Restul împărțirii lui  $f$  la  $X^2+2X+2$  este  $(n-2m+4)X+p-2m+4$  și deci  $n-2m+4=0$  și  $p-2m+4=0$ . Cum  $f(-1)=-154$  avem și  $m+n+p=-18$ . Rezultă  $m=-2, n=-8, p=-8$ .

*ii)* Avem  $f=(X^2+2X+2)(X^2-4)$ . Rădăcinile lui  $f$  sunt deci  $1 \pm i$  și  $\pm 2$ .

**2.**

*i)* Avem

$$A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, A^3 = I_2$$

și deci  $A^{302} = (A^3)^{100} \cdot A^2 = A^2$ .

*ii)* Deoarece  $A \cdot A = A^2, A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I_3$  și  $A^2 \cdot A^2 = A$  rezultă că mulțimea  $G$  este stabilă față de înmulțire. Înmulțirea matricelor este asociativă și deci această proprietate este valabilă și pentru  $G$ . Elementul neutru este  $I_2 \in G$ . Din  $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I_2$ , rezultă că  $A^{-1} = A^2$  și  $(A^2)^{-1} = A$ . Așadar, elementele lui  $G$  sunt inversabile. Cum demonstrarea comutativității este imediată totul rezultă.

**3.** Avem  $x, y \in (0,1) \cup (1,\infty)$ . Prima ecuație se scrie succesiv

$$\frac{\ln y}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln y} = 2 \Leftrightarrow \ln^2 x + \ln^2 y = 2 \ln x \ln y \Leftrightarrow (\ln x - \ln y)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y.$$

A doua ecuație devine  $x^n + x = 12$ . Rezultă  $x$  divide 12 deci  $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ . După încercări se constată că soluțiile sunt  $x = 3$  pentru  $n = 2$  și  $x = 6$  pentru  $n = 1$ .

## II.

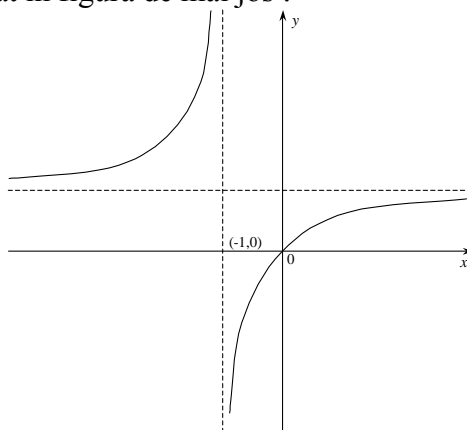
1. Avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$  și deci  $x = -1$  este asimptotă verticală.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$  deci  $y = 1$  este asimptotă orizontală.

Graficul intersectează axele în  $A(0,0)$ . Avem  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$  și

$f''(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ . Avem tabelul :

$x$	$-\infty$	$-1$	$\infty$
$f'(x)$	$+$ $+$ $+$ $+$	$+$ $+$ $+$ $+$	
$f(x)$	$1$ ↗	$\infty$ $-\infty$	↗ $1$
$f''(x)$	$+$ $+$ $+$ $+$	$+$ $-$ $-$ $-$	

Graficul este schițat în figura de mai jos :



2. Integrând prin părți avem :

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA SEPTEMBRIE 2001**

**I.**

**1.**

$$i) \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 3pq - p^3 ;$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 .$$

$$ii) \quad y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -p - \frac{p}{q} = -\frac{pq + p}{q} ;$$

$$y_1y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2} + 2 = \frac{(q+1)^2}{q} .$$

$$\text{Ecuația căutată este } y^2 + p\left(1 + \frac{1}{q}\right)y + \frac{(q+1)^2}{q} = 0 .$$

**iii)** Din  $x_1x_2 = q$  rezultă  $|q| = |x_1x_2| = |x_1| \cdot |x_2| = 1$ , iar din  $x_1 + x_2 = -p$  avem  $|p| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = 2$ . Ecuația se scrie  $x^2 + |p|x + 1 = 0$ .

Dacă  $|p| = 2$  rădăcinile sunt egale cu  $-1$ .

Dacă  $|p| < 2$  atunci  $\Delta = |p|^2 - 4 < 0$  și deci  $x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ . Deoarece coeficienții ecuației sunt reali, rădăcinile sunt conjugate, adică  $x'_2 = \overline{x'_1}$ . Cum  $x'_1x'_2 = 1$  rezultă că  $|x'_1|^2 = 1$  și deci  $|x'_1| = |x'_2| = 1$ .

**2.**

**i)** Trebuie arătat că  $x^{\ln y} \neq 1$ , adică  $\ln y \ln x \neq 0$ , ceea ce este adevărat deoarece  $x \neq 1, y \neq 1$ .

**ii)** Legea se mai scrie  $x * y = e^{\ln x \ln y}$ . Evident operația este comutativă. Avem  $(x * y) * z = e^{\ln x \ln y \ln z} = x * (y * z)$ , adică legea este asociativă.

Din  $x^{\ln \theta} = x$  deducem  $\ln \theta \ln x = \ln x$  și deci  $\ln \theta = 1$ , adică  $\theta = e \in G$ . Pentru  $x \in G$  căutăm  $x' \in G$  astfel încât  $x * x' = e$ , adică  $\ln x \ln x' = 1$ . Deci  $x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G$  este simetricul lui  $x$ .

## II.

### 1.

i) Pe  $(-\infty, 1)$  și pe  $(1, \infty)$  funcția este continuă. Pentru continuitate în 1 se impun condițiile  $f(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ , adică  $a + b = 2$ .

ii) Cum  $f$  este derivabilă pe  $(-\infty, 1)$  și pe  $(1, \infty)$  și continuă în 1 se pune condiția  $f'_s(1) = f'_d(1)$ , adică  $a = 2$ . Rezultă  $b = 0$ .

### 2.

i) Pentru  $a \neq 0$  avem

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^2 + a^2}{x^2 + a^2} dx - \int_1^2 \frac{a^2}{x^2 + a^2} dx = x \Big|_1^2 - a^2 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_1^2 = \\ &= 1 - a \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{a} - \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

Pentru  $a = 0$  avem  $\int_1^2 dx = x \Big|_1^2 = 1$ .

$$\text{Așadar } f(a) = \begin{cases} 1 - a \left( \operatorname{arctg} \frac{2}{a} - \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \right), & \text{pentru } a \neq 0 \\ 1, & \text{pentru } a = 0 \end{cases}.$$

ii)  $f$  este continuă pe  $(-\infty, 0)$  și pe  $(0, \infty)$ .

Avem

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} f(a) = 1 - 0 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

și

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a < 0}} f(a) = 1 - 0 \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Cum  $f(0) = 1$  rezultă că  $f$  este continuă în 0.



### III.

#### 1.

i) Notăm  $a, b, c$  și  $d$  măsurile arcelor  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ . Rezultă  $a + c = \pi$  și  $b + d = \pi$ . Lungimile coardelor sunt  $AB = 2R \sin \frac{a}{2}$ ,  $BC = 2R \sin \frac{b}{2}$ ,  $CD = 2R \sin \frac{c}{2}$ ,  $DA = 2R \sin \frac{d}{2}$ .

Avem

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= 4R^2 \left( \sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} \right) = 4R^2 \left( \sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right) \right) = \\ &= 4R^2 \left( \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \right) = 4R^2. \end{aligned}$$

Analog  $BC^2 + DA^2 = 4R^2$  și de aici rezultă relația cerută.

ii) Fie  $M$  mijlocul lui  $AB$ . Avem  $OE^2 \geq OM^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$  și deci

$$\sum OE^2 \geq \sum \left( R^2 - \frac{AB^2}{4} \right) = 4R^2 - \frac{8R^2}{4} = 2R^2.$$

#### 2.

i) Ecuația se scrie prin dedublare. Avem  $\frac{xx_0}{4} + yy_0 = 1$  și deci

$$\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1.$$

ii) Fie  $M(x_0, y_0)$  punctul de tangență. Ecuația tangentei la elipsă în punctul  $M$  este  $\frac{xx_0}{4} + yy_0 = 1$ . O dreaptă oarecare care trece prin  $P(1,1)$  are ecuația  $y - 1 = m(x - 1)$  cu  $m \in \mathbb{R}$ , adică  $mx - y + 1 - m = 0$ . Pentru a fi tangentă în  $M$ , trebuie ca

$$\frac{x_0}{4m} = -y_0 = \frac{1}{m-1},$$

$$\text{de unde } x_0 = \frac{4m}{m-1} \text{ și } y_0 = \frac{-1}{m-1}.$$

Cum  $M$  aparține elipsei rezultă  $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$  și deci

$$\frac{4m^2}{(m-1)^2} + \frac{1}{(m-1)^2} = 1. \text{ De aici } m=0 \text{ și } m=-\frac{2}{3}. \text{ Ecuațiile tangentelor}$$

sunt  $y=1$  și  $y-1=-\frac{2}{3}(x-1)$ .

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2002**

**I.**

1. Se consideră ecuația  $x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Să se calculeze :

a)  $\sum_{i=1}^4 x_i^2, \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i}, \sum_{i=1}^4 x_i^3$  ;

b)  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ .

2. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ . Se notează  $G_n = \{a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_n r_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ . Să se arate că :

- a)  $G_n$  este grup abelian în raport cu adunarea numerelor ;  
 b)  $G_n \neq \mathbb{Q}$ .

**II.**

1. Se consideră funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + x \cdot e^{-\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \in (0, \infty), \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

- a) Să se determine  $\alpha$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă ;  
 b) Să se arate că pentru  $\alpha = 0$  funcția  $f$  este derivabilă cu derivata continuă.

2. Se consideră funcția  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & , \text{ pentru } x \in [0,1] \\ \frac{2x+1}{x^2(x+1)} & , \text{ pentru } x \in (1,2] \end{cases}$$

a) Să se arate că funcția  $f$  este continuă ;

b) Să se calculeze  $\int_0^2 f(x) dx$ .

### III.

1. Fie  $A$  și  $B$  două puncte fixe în plan. Să se determine locul geometric al punctelor  $M$  din plan cu proprietatea că  $M, A$  și  $B$  sunt vârfurile unui triunghi isoscel.

2. Fie  $ABC$  un triunghi cu lungimile laturilor  $a, b, c$ .

a) Scrieți două formule de calcul pentru aria triunghiului  $ABC$ .

b) Să se arate că

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq S$$

unde  $S$  este aria triunghiului  $ABC$ .

c) Să se determine unghiurile triunghiului  $ABC$  în cazul în care, la punctul  $b$ ), are loc egalitate.

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA IULIE 2002

### I.

1. Se dă polinomul  $f(X) = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ , având rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$ .

a) Să se arate că  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -m^3 + 3m + 3$  ;

b) Să se determine valorile parametrului  $m$  pentru care  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geq 3(x_1 x_2 x_3)^2$  ;

c) Să se determine  $m$  astfel încât polinomul  $f(X)$  să se dividă cu  $X - 1$  și, în acest caz, să se găsească rădăcinile polinomului  $f(X)$ .

2. Fie sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = \lambda \end{cases} \quad \text{unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Să se determine  $\lambda$  astfel încât sistemul să fie compatibil și, în acest caz, să se rezolve sistemul.

II. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \frac{x^2}{1 + |x - 1|}$ .

1. Să se reprezinte grafic funcția  $f$ .

2. Să se calculeze  $\int_0^2 f(x) dx$ .

## FACULTATEA DE MATEMATICĂ SESIUNEA SEPTEMBRIE 2002

I.

1. Fie  $a > 0, a \neq 1$ . Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului  $a$  inecuația  $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}$ .

2. Se definesc pe  $\mathbb{R}$  operațiile algebrice  $\oplus$  și  $\otimes$  astfel :  $x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  și  $x \otimes y = xy$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Să se arate că :

i)  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  este corp comutativ ;

ii) Corpul numerelor reale  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  este izomorf cu corpul  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ .

## II.

1. Fie  $a \in \mathbb{R}$ . Se definește funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $f(x) = a|x|$ . Să se arate că :

- i) Funcția este continuă ;
- ii) Avem echivalența :  $f$  este derivabilă  $\Leftrightarrow a = 0$ .

2. Fie  $a \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ . Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + a} dx.$$

## III.

1. Laturile unui triunghi  $ABC$  au lungimile  $AB = 13$ ,  $BC = 14$ ,  $AC = 15$ .

- i) Să se afle aria triunghiului  $ABC$  ;
- ii) Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului  $ABC$  în jurul laturii  $[BC]$ .

2. Fie  $A'(2, 3)$ ,  $B'(-2, 1)$ ,  $C'(0, -3)$  mijloacele laturilor  $[BC]$ ,  $[CA]$  și respectiv,  $[AB]$  ale unui triunghi  $ABC$ . Se cere :

- i) Să se scrie ecuațiile dreptelor  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ .
- ii) Să se afle coordonatele punctelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .
- iii) Să se afle coordonatele centrului de greutate, ortocentrului și centrului cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA SEPTEMBRIE 2002

### I.

1. Să se determine numerele  $a$  și  $b$  astfel încât polinomul  $f = aX^4 + bX^3 - 3$  să fie divizibil cu polinomul  $g = (X - 1)^2$ .

2. Să se găsească câtul împărțirii lui  $f$  la  $g$  pentru numerele  $a$  și  $b$  determinate la punctul 1.

**II.**

1. Să se determine numerele  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  astfel încât următorul sistem să fie compatibil și matricea sistemului să aibă rangul 2

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + \alpha z + t = -1 \\ x - y + z + \beta t = \gamma \end{cases}$$

2. Să se rezolve sistemul pentru numerele  $\alpha, \beta, \gamma$  determinate la punctul 1.

**III.** Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_n = (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

1. Să se scrie termenii  $x_1, x_2, x_3, x_4$  și să se stabilească semnul lor.

2. Să se arate că șirul  $(x_n)_n$  nu este monoton.

3. Să se arate că șirul  $(x_n)_n$  este convergent și să se calculeze limita sa.

**IV.** Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx$ .

**SOLUȚII**

**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**

**SESIUNEA IULIE 2002**

**I.**

**1.**

a) Din relațiile lui Viète :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ,  $\sum x_1 x_2 = 3$ ,  
 $\sum x_1 x_2 x_3 = 4$ ,  $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$ , avem :

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \left( \sum_{i=1}^4 x_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^4 x_i x_2 = 0 - 2 \cdot 3 = -6$$

și

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{4}{1} = 4.$$

Cum  $x_1$  este rădăcină avem  $x_1^4 + 3x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0$  și deci  $x_1^3 + 3x_1 - 4 + \frac{1}{x_1} = 0$ .

Analog avem :

$$x_2^3 + 3x_2 - 4 + \frac{1}{x_2} = 0, \quad x_3^3 + 3x_3 - 4 + \frac{1}{x_3} = 0, \quad x_4^3 + 3x_4 - 4 + \frac{1}{x_4} = 0.$$

Însumând aceste relații obținem :  $\sum_{i=1}^4 x_i^3 + 3 \sum_{i=1}^4 x_i - 16 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i} = 0$  și deci

$$\sum_{i=1}^4 x_i^3 = 16 - 4 = 12.$$

$$b) \text{ Adunând toate liniile la prima linie avem : } D = \begin{vmatrix} S & S & S & S \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

unde  $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . Deoarece  $S = 0$  rezultă  $\Delta = 0$ .

$$2. \text{ Dacă } x = \sum_{i=1}^n a_i r_i, y = \sum_{i=1}^n b_i r_i \text{ cu } a_i, b_i \in \mathbb{Z} \text{ atunci } x + y = \sum_{i=1}^n c_i r_i$$

unde  $c_i = a_i + b_i \in \mathbb{Z}$  și deci  $x + y \in G_n$ . Cum adunarea numerelor naturale este asociativă și comutativă rezultă că în  $G_n$  avem asociativitate și comutativitate.

Pentru  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \in \mathbb{Z}$  obținem elementul neutru 0.

$$\text{Pentru } x = \sum_{i=1}^n a_i r_i \text{ considerăm } y = \sum_{i=1}^n (-a_i) r_i \text{ cu } -a_i \in \mathbb{Z} \text{ și avem}$$

$x + y = y + x = 0$ . Așadar,  $(G_n, +)$  este grup abelian.



b) Fie  $r_i = \frac{p_i}{q_i}$  cu  $q_i \in \mathbb{N}^*$  și  $p_i \in \mathbb{Z}$ . Arătăm că  $\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n + 1} \notin G_n$ .

Presupunem  $\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n + 1} = \sum a_i \frac{p_i}{q_i}$ . Notând  $q = q_1 q_2 \dots q_n$  rezultă  $q \in \mathbb{N}^*$

și  $\frac{1}{q+1} = \frac{m}{q}$  unde  $m \in \mathbb{Z}$ , de unde  $q = \frac{m}{1-m} = -1 + \frac{1}{1-m}$ .

Cum  $q \in \mathbb{Z}$  rezultă  $1-m \mid 1$  de unde  $1-m=1$  sau  $1-m=-1$  și deci  $m=0$  sau  $m=2$ . Rezultă  $q=0$  sau  $q=-2$  ceea ce este în contradicție cu  $q \in \mathbb{N}^*$ .

## II.

### 1.

a) Restricția lui  $f$  la  $(0, \infty)$  este continuă, fiind compunere de funcții continue. Pentru continuitatea în 0 calculăm  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \alpha + a \cdot 0 = \alpha$  și  $f(0) = 0$  și  $f$  este continuă în 0 dacă și numai

dacă  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , adică  $\alpha = 0$ .

b) Pentru  $\alpha = 0$  avem  $f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \in (0, \infty) \\ 0 & , \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$ . Pentru

$x \in (0, \infty)$  funcția este derivabilă ca produs de funcții derivabile. Avem de asemenea :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Deci funcția  $f$  are derivabila în zero și  $f'(0) = 0$ .

Așadar,  $f'(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}, & \text{pentru } x \in (0, \infty) \\ 0 & , \text{ pentru } x = 0 \end{cases}$ . Funcția  $f'$  este

continuă pe  $(0, \infty)$ . În plus  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0$  și cum

$f'(0)=0$  rezultă că  $f'$  este continuă și în 0, adică este continuă pe  $[0, \infty)$ .

**2.**

**a)**  $f$  este continuă pe  $[0,1)$  și pe  $(1,2]$  pentru că este funcție polinomială și respectiv rațională. Avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x = \frac{3}{2}$  și  $f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1(1+1)} = \frac{3}{2}$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2} = f(1)$  rezultă că  $f$  este continuă și în 1 adică este continuă pe  $[0,2]$ .

**b)** Avem

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \\ &+ \int_1^2 \left( \frac{x}{x^2(x+1)} + \frac{x+1}{x^2(x+1)} \right) dx = \frac{3}{4} + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \frac{3}{4} + \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{3}{4} + \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} + 1 = \\ &= \frac{5}{4} + \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

### III.

**1.** Dacă  $MA=MB$  atunci  $M$  se află pe mediatoarea lui  $AB$ . Dacă  $MA=AB$  atunci  $M$  se află pe cercul  $C_1(A,R)$  unde  $R=AB$ , iar dacă  $MB=AB$  atunci  $M$  se află pe  $C_2(B,R)$ . Punctul  $M$  nu poate fi plasat în mijlocul  $C$  al lui  $AB$  sau în intersecția cercurilor  $C_1$  sau  $C_2$  cu dreapta  $AB$ . Dacă  $E$  și  $F$  sunt simetricul lui  $A$  față de  $B$  și respectiv simetricul lui  $B$  față de  $A$  locul este  $M \cup C_1 \cup C_2 - \{A, B, C, E, F\}$ .

2. Avem  $S = \frac{ab \sin C}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$  unde  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , iar  $r$  și  $R$  sunt razele cercurilor înscris și circumscris.

b) Avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(a^2 + b^2) &= \frac{1}{4}(a-b)^2 + \frac{ab}{2} = \frac{1}{4}(a-b)^2 + \frac{ab}{2} \sin C + \frac{ab}{2}(1 - \sin C) = \\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2 + S + \frac{ab}{2}(1 - \sin C) \geq S \end{aligned}$$

deoarece  $\sin C \leq 1$ .

c) Relația  $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) = S$  se scrie  $\frac{1}{4}(a-b)^2 + \frac{ab}{2}(1 - \sin C) = 0$ ,  
adică  $a-b=0$  și  $1 - \sin C = 0$ . Rezultă  $C = 90^\circ$  și  $A = B = 45^\circ$ .

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA IULIE 2002

### I.

1. Relațiile lui Viète sunt :  $x_1 + x_2 + x_3 = -m$ ,  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$   
și  $x_1x_2x_3 = 1 - m$ . Notăm  $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Avem

$$S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = m^2 - 4.$$

Cum  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile ecuației avem

$$x_1^3 + mx_1^2 + 2x_1 + m - 1 = 0$$

$$x_2^3 + mx_2^2 + 2x_2 + m - 1 = 0.$$

$$x_3^3 + mx_3^2 + 2x_3 + m - 1 = 0$$

Adunând aceste egalități, membru cu membru, avem

$$S_3 + mS_2 + 2S_1 + 3(m-1) = 0$$

și deci

$$S_3 = -m(m^2 - 4) - 2(-m) - 3m + 3 = -m^3 + 3m + 3.$$

**b)** Inegalitatea se scrie

$$-m^3 + 3m + 3 \geq 3(1-m)^2 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0, \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right].$$

**c)** Avem  $X-1$  divide  $f(X) \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow 1+m+2+m-1=0 \Leftrightarrow m=-1$ .

**2.** Matricea sistemului este  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ . Deoarece

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{și} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 11 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{rezultă} \quad \text{rang } A = 2.$$

Alegem  $\Delta_{pr} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$  și deci  $x, y$  sunt necunoscutele principale iar primele două ecuații sunt principale. Avem

$$\Delta_{car_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 15 & 7 & 7+\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(7+\lambda) - 15 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

Sistemul este compatibil pentru  $\lambda = 5$ .

Notăm  $z = \alpha, t = \beta$  și avem

$$\begin{cases} 2x - y = 1 - \alpha - \beta \\ x + 2y = 2 + \alpha - 4\beta. \end{cases}$$

Deci soluțiile sunt:  $\left(\frac{4-\alpha-6\beta}{5}, \frac{3\alpha-7\beta+3}{5}, \alpha, \beta\right), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

## II.

1. Avem  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2-x}, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  și

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Asimptota la  $-\infty$  :  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$  și

$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$  și deci pentru

$x \rightarrow -\infty$  asimptota este  $y = -x - 2$ . Pentru  $x \rightarrow \infty$  avem asimptota  $y = x$ .

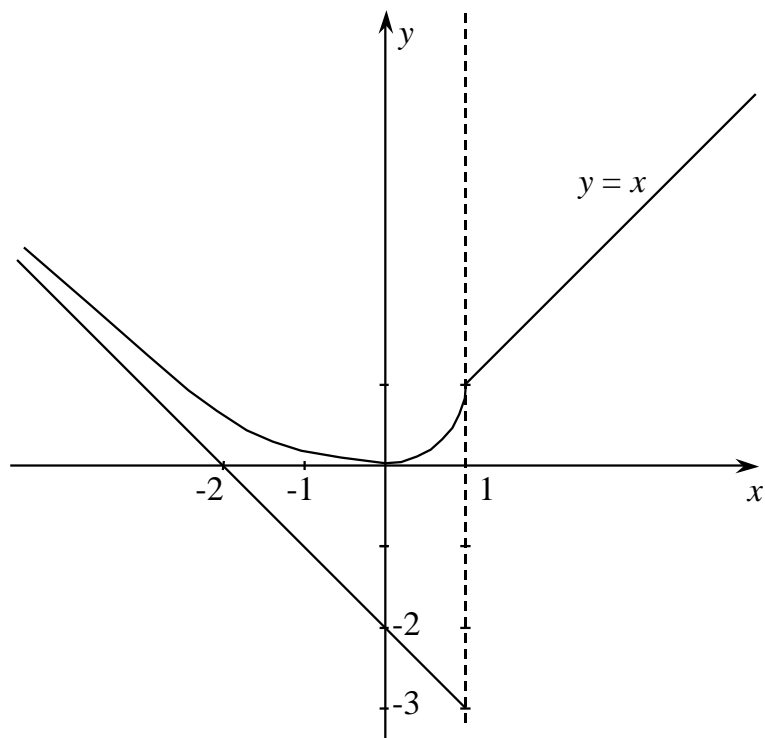
Avem  $f'(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^2}{(2-x)^2}, & \text{pentru } x < 1 \\ 1, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$ ,  $f'_s(1) = 3, f'_d(1) = 1$  deci  $f$  are

punct unghiular în  $A(1,1)$ .

Avem  $f''(x) = \begin{cases} -\frac{8}{(x-2)^3}, & \text{pentru } x < 1 \\ 0, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$ .

Comportarea funcției este dată de tabelul :

$x$	$-\infty$	$0$				$1$	$\infty$			
$f'(x)$	- - - - -	$0$				+	+	+	+	+
$f(x)$	$\infty$	$\searrow$				$0$	$\nearrow$			
$f''(x)$		+	+	+	+	+	+	$0$	$0$	



2. Avem :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2-x} dx + \int_1^2 x dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 4 + 4}{2-x} dx + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \\
 &= -\int_0^1 (x+2) dx - 4 \int_0^1 \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{2} = -\frac{(x+2)^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{3}{2} = 4 \ln 2 - 1.
 \end{aligned}$$

**FACULTATEA DE MATEMATICĂ  
SESIUNEA SEPTEMBRIE 2002**

**I.**

1. Avem  $\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{\log_a x}{2}$  și  $\log_{a^4} x = \frac{\log_a x}{4}$ .

Inecuația se scrie  $\log_a x \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_a x \geq 1$ . Pentru  $a \in (0,1)$  avem  $0 < x \leq a$  și deci  $x \in (0, a]$ . Pentru  $a > 1$  avem  $x \geq a$  deci  $x \in [a, \infty)$ .

**2.**

i) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  avem  $x \oplus y = \sqrt{x^3 + y^3} \in \mathbb{R}$  și deci  $\mathbb{R}$  este stabilă față de operația  $\oplus$ . Pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$  avem  $(x \oplus y) \oplus z = \sqrt{x^3 + y^3} \oplus z = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$ . Analog avem  $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus \sqrt{y^3 + z^3} = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$  și deci  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  avem  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$  adică operația  $\oplus$  este asociativă. Rezultă imediat că  $\oplus$  este și comutativă. Avem  $x \oplus e = x$  adică  $\sqrt{x^3 + e^3} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 = x^3 \Leftrightarrow e = 0$ . Așadar  $e = 0$  este elementul neutru al legii. Pentru  $x \in \mathbb{R}$  căutăm  $\tilde{x}$  astfel ca  $x \oplus \tilde{x} = e$ , adică  $\sqrt{x^3 + \tilde{x}^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + \tilde{x}^3 = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = -x \in \mathbb{R}$ . Aceste proprietăți arată faptul că  $(\mathbb{R}, \oplus)$  este grup comutativ. Cum  $\otimes$  coincide cu înmulțirea rezultă că  $(\mathbb{R}^*, \otimes)$  este grup comutativ. Arătăm că legea  $\otimes$  este distributivă față de  $\oplus$ . Pentru  $x, y, z \in \mathbb{R}$  avem

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \Leftrightarrow x \sqrt{y^3 + z^3} = \\ &= xy \oplus (xz) \Leftrightarrow \sqrt{x^3 y^3 + x^3 z^3} = \sqrt{(xy)^3 + (xz)^3} \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat. Rezultă că  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  este corp comutativ.

**ii)** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Avem  $f(x+y) = \sqrt[3]{x+y}$  și  $f(x) \oplus f(y) = \sqrt[3]{x} \oplus \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3} = \sqrt[3]{x+y}$ . Așadar  $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$ . De asemenea:  $f(xy) = \sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = f(x) \otimes f(y)$ . Mai mult, funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$  este inversabilă, inversa sa fiind  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3$ . Cele de mai sus arată că  $f$  stabilește un izomorfism între corpurile  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  și  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ .

## II.

### 1.

**i)** Avem  $f(x) = \begin{cases} -ax, & x \leq 0 \\ ax, & x > 0 \end{cases}$ . Restricțiile lui  $f$  la  $(-\infty, 0)$  și la  $(0, \infty)$  sunt funcții elementare și deci continue. Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-ax) = 0$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$  și  $f(0) = 0$  avem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  adică  $f$  este continuă în 0 și deci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

**ii)**  $f$  este derivabilă pe  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Pentru ca  $f$  să fie derivabilă  $\mathbb{R}$  este necesar și suficient ca  $f$  să fie derivabilă în 0. Avem

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-ax}{x} = -a$$

și

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{ax}{x} = a.$$

Așadar,  $f$  este derivabilă în 0 (și deci pe  $\mathbb{R}$ ) dacă și numai dacă  $f'_s(0) = f'_d(0) \Leftrightarrow -a = a \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ .

**2.** Pentru  $a < -1$  avem

$$\frac{1}{x^2 + a} = \frac{1}{x^2 - (\sqrt{-a})^2} = \frac{1}{(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a})} = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \left( \frac{1}{(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a})} \right)$$

și deci



$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+a} dx &= \frac{1}{2\sqrt{-a}} \int_0^1 \left( \frac{1}{x-\sqrt{-a}} - \frac{1}{x+\sqrt{-a}} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{-a}}{x+\sqrt{-a}} \right| \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-a}} \left( \ln \left| \frac{1-\sqrt{-a}}{1+\sqrt{-a}} \right| - \ln \left| \frac{-\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} \right| \right) = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \ln \frac{\sqrt{-a}-1}{\sqrt{-a}+1}.\end{aligned}$$

Pentru  $a > 1$  avem

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+(\sqrt{a})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{a}}$$

### III.

#### 1.

i) Notând  $p = \frac{a+b+c}{2}$  are loc formula lui Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \text{ Cum } \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ avem}$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21^2 \cdot 4^2} = 84.$$

ii) Fie  $D$  proiecția lui  $D$  pe  $BC$ . Deoarece  $AC$  este cea mai mare latură și  $AC^2 < AB^2 + BC^2$  rezultă că triunghiul  $ABC$  este ascuțitunghic și deci  $D \in (BC)$ . Prin rotirea triunghiului  $ABC$  în jurul lui  $BC$  se obțin două conuri de rază  $AD$  și înălțimi  $BD$  și  $CD$ . Avem

$$V = \frac{\pi AD^2}{3} \cdot BD + \frac{\pi AD^2}{3} \cdot CD = \frac{\pi AD^2}{3} \cdot BC.$$

Avem  $S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{14 \cdot AD}{2}$ , adică  $84 = 7AD$ , de unde  $AD = 12$  și

$$V = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 14}{3} = 672.$$

#### 2.

i) Dreapta  $BC$  este paralela dusă prin  $A'$  la  $B'C'$ . Avem

$$m_{B'C'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-1}{0+2} = -2 \text{ și ecuația lui } BC \text{ este } y-3 = -2(x-2),$$

adică  $(BC): 2x + y - 7 = 0$ . Analog se obțin ecuațiile  $(AB): x - 2y - 6 = 0$  și  $(AC): 3x - y + 7 = 0$ .

**ii)** Punctul  $A$  se găsește la intersecția dreptelor  $(AB)$  și  $(AC)$ .

Coordonatele sale se obțin prin rezolvarea sistemului 
$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Rezultă  $A(-4, -5)$ . Din sistemul 
$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$$
 se obține  $B(4, -1)$ , iar

din sistemul 
$$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$
 se obține  $C(0, 7)$ .

**iii)** Centrul de greutate are coordonatele

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) = G\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Deoarece  $m_{AB} = \frac{1}{2}$  și  $m_{BC} = -2$  rezultă că  $AB \perp BC$ . Ortocentrul triunghiului dreptunghic  $ABC$  este  $B(4, -1)$ , iar centrul cercului circumscris este mijlocul lui  $AC$  adică  $B'(-2, 1)$ .

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA SEPTEMBRIE 2002

### I.

**1.** Este necesar și suficient ca  $f(1) = 0$  și  $f'(1) = 0$ . Avem  $f'(x) = 4aX^3 + 3bX^2$  și condițiile sunt  $a + b - 3 = 0$  și  $4a + 3b = 0$ . Rezultă  $a = -9, b = 12$ . O altă soluție, se obține aplicând schema lui Horner de două ori.

**2.** Împărțind polinoamele  $-9X^4 - 12X^3 - 3$  și  $X^2 - 2X + 1$  găsim câtul :  $-9X^2 - 6X - 3$ . Altfel, câtul se obține și din schema lui Horner.

## II.

1. Determinanții de ordin trei sunt nuli. Avem deci

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \beta \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Din } \Delta_1 = 0 \text{ obținem}$$

$\alpha + 1 = 0$  și deci  $\alpha = -1$ . Din  $\Delta_2 = 0$ , obținem  $3(\beta + 1) = 0$  și deci

$\beta = -1$ . Deoarece  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$  minorii obținuți prin bordarea acestui

determinant sunt nuli, rezultă  $\text{rang } A = 2$ .

Alegem determinantul principal  $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$  și pentru

compatibilitatea sistemului avem condiția  $\Delta_{car} = 0$ , adică  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$

și deci  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \gamma - 1 \end{vmatrix} = 0$ . Rezultă de aici  $\gamma = 1$ .

Așadar  $\alpha = \beta = -1$  și  $\gamma = 1$ .

2. Reținem ecuațiile principale  $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y - z + t = -1 \end{cases}$ . Notăm

necunoscutele secundare :  $z = \lambda, t = \mu$  și avem  $\begin{cases} 2x - y = 1 - \lambda + \mu \\ x + y = -1 + \lambda - \mu \end{cases}$ . Din

adunarea ecuațiilor rezultă  $x = 0$  și apoi  $y = -1 + \lambda - \mu$ . Soluțiile sunt  $(0, -1 + \lambda - \mu, \lambda, \mu)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , sistemul fiind dublu nedeterminat.

## III.

1. Avem

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} < 0, x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0, x_3 = \sqrt{3} - 2 < 0, x_4 = \sqrt{5} - 2 > 0.$$

2. Deoarece  $x_{2k} = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} > 0$  și  $x_{2k+1} = \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+2} < 0$  rezultă că  $x_{n+1} - x_n > 0$  pentru  $n$  impar și  $x_{n+1} - x_n < 0$

pentru  $n$  par adică nu există  $n_0$  astfel ca pentru  $n \geq n_0$  şirul  $(x_n)_{n \geq n_0}$  să fie monoton.

**3.** Avem  $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  şi cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$  rezultă că

$\lim_{n \leftarrow \infty} x_n = 0$ .

**IV.** Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 + \arctg x \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 + \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2003**

**I.**

1. Fie  $p, q \in \mathbb{R}$ , fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile ecuației  $x^3 + px + q = 0$ , și fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

i) Să se arate că  $\det(A) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ .

ii) Să se calculeze matricea  $A \cdot {}^tA$  în funcție de  $p$  și  $q$  (unde  ${}^tA$  este transpusa matricei  $A$ ).

iii) Să se arate că  $(\det(A))^2 = -4p^3 - 27q^2$ .

iv) Să se arate că rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$  sunt reale dacă și numai dacă  $4p^3 + 27q^2 \leq 0$ .

2. Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  a numerelor întregi se definesc operațiile algebrice  $\oplus$  și  $\odot$  astfel :  $x \oplus y = x + y - 2$ ,  $x \odot y = xy - 2(x + y) + 6$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

i) Să se arate că  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  este un inel comutativ.

ii) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Z}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = ax + b$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$ , să fie izomorfism de la inelul  $\mathbb{Z}$  al numerelor întregi la inelul  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ .

iii) Să se determine elementele inversabile ale inelului  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ .

**II.**

1. Fie  $a$  și  $b$  două numere strict pozitive. Se definește șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  astfel :

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{an^2 + bk}}.$$

i) Să se scrie  $x_1, x_2, x_3$ .

ii) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Să se arate că următoarele două proprietăți sunt echivalente :

i) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , avem  $f(x) = 0$ .

ii) Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $h > 0$ , avem  $\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq h^2$ .

### III.

1. Se dă familia de drepte

$$(\mathcal{F}): (\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + 3\lambda - 2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

într-un plan raportat la un sistem de coordonate carteziene  $xOy$ .

Să se determine dreapta din familia  $(\mathcal{F})$  care intersectează axele  $Ox$  și  $Oy$  în punctele  $A$ , respectiv  $B$ , astfel încât să fie satisfăcută relația

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 5.$$

2. Fie  $ABCD A'B'C'D'$  o prismă dreaptă circumscrisă unei sfere cu diametrul de lungime  $d$ . Să presupunem că baza  $ABCD$  este un romb având unghiurile ascuțite de măsură  $\pi/4$ . Să se calculeze aria secțiunii prismei cu planul determinat de dreptele  $BC$  și  $A'D'$ .

**COLEGIUL DE INFORMATICĂ  
SESIUNEA IULIE 2003**

**I.**

1. Se dă polinomul

$$f(X) = X^3 + X^2 + aX + b \in \mathbb{C}[X].$$

Să se determine  $a$  și  $b$  și să se afle rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$  ale lui  $f(X)$ , știind că restul împărțirii lui  $f(X-1)$  la  $X+1$  este  $-4$  și  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$ .

2. Se dă sistemul de ecuații liniare :

$$\begin{cases} (3-2m)x + (2-m)y + z = m \\ (2-m)x + (2-m)y + z = 1 \\ x + y + (2-m)z = 1 \end{cases}$$

unde  $m$  este un parametru real.

a) Să se arate că determinantul matricei sistemului este egal cu  $(m-1)^2(3-m)$ .

b) Să se determine valorile parametrului  $m$  pentru care sistemul este compatibil determinat și să se rezolve sistemul în acest caz.

**II.**

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x|+1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se studieze derivabilitatea funcției  $f$  în punctul  $x=0$ .

b) Să se reprezinte grafic funcția  $f$ .

2. Să se calculeze integrala  $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx$ .

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ SESIUNEA IULIE 2003

**I.**

**1.**

i) Prin înmulțirea primei linii cu  $x_1$  și scăderea ei din cea de-a doua linie, obținem :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix},$$

iar prin înmulțirea primei linii cu  $x_1^2$  și scăderea ei din cea de-a treia linie, obținem :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare :

$$\begin{aligned} \det A &= (x_2 - x_1)(x_3^2 - x_1^2) - (x_3 - x_1)(x_2^2 - x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 + x_1) - (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

După cum este binecunoscut, acest tip de determinant se numește Vandermonde.

ii) Vom folosi următoarea notație :  $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
Avem :

$$A \cdot {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}.$$

Relațiile lui Viète, împreună cu tehnicile cunoscute, ne conduc la  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -2p$ ,  $s_3 = -3q$  și  $s_4 = 2p^2$ , de unde :



$$A \cdot {}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{pmatrix}.$$

**iii)** Folosind faptul că determinantul unui produs de matrici este produsul determinanților și că determinantul unei matrici este egal cu determinantul matricii transpuse, avem, pe de o parte :

$$\det(A \cdot {}^t A) = \det(A) \cdot \det({}^t A) = (\det(A))^2$$

Pe de altă parte, un calcul direct arată că :

$$\det(A \cdot {}^t A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{pmatrix} = -4p^3 - 27q^2.$$

Prin urmare, avem :

$$(\det A)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

**iv)** Dacă rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$  sunt reale, atunci  $\det A \in \mathbb{R}$ , deci  $(\det A)^2 = -4p^3 - 27q^2 \geq 0$ , adică

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0.$$

Să observăm că, deși pare simplă, această implicație folosește punctele anterioare ale problemei.

O soluție alternativă folosește șirul lui *Rolle* (îndemnăm cititorul să completeze detaliile).

Pentru implicația inversă vom presupune că  $4p^3 + 27q^2 \leq 0$  și vom arăta că rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$  sunt reale.

După cum este binecunoscut, un polinom de grad impar are cel puțin o rădăcină reală. Putem presupune, fără pierderea generalității, că  $x_1$  este o rădăcină reală a polinomului considerat în problemă.

Dacă presupunem că nu toate rădăcinile polinomului sunt reale, atunci există  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , cu  $\beta \neq 0$ , astfel ca  $x_2 = \alpha + i\beta$  și  $x_3 = \alpha - i\beta$ .

Prin urmare :

$$(\det A)^2 = (x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 = (-4\beta^2) \left( (x_1 - \alpha)^2 + \beta^2 \right)$$

Cum :

$$(\det A)^2 = -4p^3 - 27q^2 \geq 0,$$

deducem că :

$$(-4\beta^2)((x_1 - \alpha)^2 + \beta^2) \geq 0,$$

de unde găsim că :

$$-4\beta^2 \geq 0,$$

ceea ce contrazice  $\beta \in \mathbb{R}$ , cu  $\beta \neq 0$ .

Prin urmare, presupunerea că nu toate rădăcinile polinomului sunt reale, conduce la o contradicție, deci, în ipoteza  $4p^3 + 27q^2 \leq 0$ , toate rădăcinile polinomului sunt reale.

**Comentariu.** În mod evident, esența acestei probleme este subpunctul *iv*). Fără a fi însoțit de subpunctele premergătoare, el constituie un exercițiu cu o dificultate peste medie. Majoritatea candidaților au rezolvat corect *i*) și *ii*). Mulți candidați au abordat subpunctul *iii*) calculând expresia  $[(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)]^2$ , calculul fiind, într-o oarecare măsură, anevoios. Numărul candidaților care au rezolvat *iv*) a fost redus.

Neliniștitor este faptul că majoritatea candidaților, deși au făcut dovada stăpânirii tehnicilor de calcul, par a nu fi înțeles sensul expresiei ”dacă și numai dacă”, care apare în cadrul enunțului de la *iv*).

## 2.

*i*) Trebuie arătat că  $(\mathbb{Z}, \oplus)$  este grup abelian, că  $(\mathbb{Z}, \odot)$  este monoid comutativ și că operația  $\odot$  este distributivă față de operația  $\oplus$ . Acestea sunt niște simple verificări și drept urmare ne limităm la a menționa că 2 este elementul neutru pentru legea  $\oplus$  și că 3 este elementul neutru pentru legea  $\odot$ . Simetricul lui  $x \in \mathbb{Z}$ , în  $(\mathbb{Z}, \oplus)$ , este  $4 - x$ .

*ii*) Pentru ca  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = ax + b$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$ , să fie morfism de la inelul  $\mathbb{Z}$  al numerelor întregi la inelul  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ , trebuie ca:

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

și

$$f(xy) = f(x) \odot f(y),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ , adică :

$$a(x+b)+b=(ax+b)\oplus(ay+b)$$

și

$$axy+b=(ax+b)\odot(ay+b),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ , ceea ce înseamnă :

$$a(x+y)+b=(ax+b)+(ay+b)-2$$

și

$$axy+b=(ax+b)(ay+b)-2((ax+b)+(ay+b))+6$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

După identificarea coeficienților, obținem  $b=2$ ,  $a^2=a$ ,  $a(b-2)=0$ ,  $b^2-5b+6=0$ , deci obținem morfismele  $f(x)=2$  și  $f(x)=x+2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{Z}$ .

Evident, primul morfism nu este bijecție, deci răspunsul la punctul **ii)** este  $a=1$  și  $b=2$ .

**iii)** Dacă  $x \in \mathbb{Z}$  este un element inversabil al inelului  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ , atunci există  $y \in \mathbb{Z}$  astfel ca :

$$x \odot y = xy - 2(x+y) + 6 = 3$$

deci :

$$(x-2)(y-2)=1,$$

de unde  $x-2 \in \{-1, 1\}$ , adică  $x \in \{1, 3\}$ .

Observația că 1 are drept invers pe 1, iar 3 are drept invers pe 3, în inelul  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ , încheie demonstrația faptului că elementele inversabile ale inelului  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  sunt 1 și 3.

**Comentariu.** Majoritatea candidaților au rezolvat corect subpunctul **i)**, deși a existat și un număr relativ însemnat de lucrări în care axiomele din definiția inelului apăreau neînsoțite de cuantificatorii logici corespunzători sau cu acești cuantificatori într-o ordine necorespunzătoare. Chiar și subpunctele **ii)** și **iii)** s-au dovedit dificile pentru unii dintre concurenți.

## II.

### 1.

i) Avem

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{a+b}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{4a+b}} + \frac{1}{\sqrt{4a+2b}} \text{ și}$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{9a+b}} + \frac{1}{\sqrt{9a+2b}} + \frac{1}{\sqrt{9a+3b}}.$$

ii) Pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , avem

$$\frac{1}{\sqrt{an^2 + bn}} \leq \frac{1}{\sqrt{an^2 + bk}} \leq \frac{1}{\sqrt{an^2 + b}},$$

de unde, prin sumare după  $k$ , obținem :

$$\frac{n}{\sqrt{an^2 + bn}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{an^2 + b}}.$$

Cum șirurile de încadrare au limită comună, anume :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{an^2 + bn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{an^2 + b}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

se deduce, cu lema "cleștelui", că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

**Comentariu.** Mai mult decât surprinzător, mulți candidați nu au putut soluționa punctul i), ceea ce arată că sensul simbolului  $\sum$  este încă neclar pentru mulți elevi de liceu, fapt care implică o slabă înțelegere a unor noțiuni fundamentale, precum cea de determinant sau de integrală. Nici în privința subpunctului ii) lucrurile nu au stat cu mult mai bine, mulți candidați încercând, fără succes, fie să arate că șirul în cauză este monoton și mărginit, fie să-l prezinte ca pe un șir de sume *Riemann*.

## 2.

Implicația  $i) \Rightarrow ii)$  este evidentă, căci dacă pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , avem  $f(x) = 0$ , atunci :

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| = 0 \leq h^2,$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și orice  $h > 0$ .

Pentru implicația  $ii) \Rightarrow i)$  vom prezenta trei variante de soluție.

**A.** Considerăm funcția  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată astfel :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

După cum se cunoaște, deoarece  $f$  este continuă,  $F$  este derivabilă și

$$F'(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $h > 0$  arbitrare, avem :

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = F(x+h) - F(x),$$

deci condiția **ii)** înseamnă :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \leq h.$$

Prin trecere la limită pentru  $h$  tinzând la 0, obținem :

$$|F'(x)| = 0,$$

adică  $f(x) = 0$ .

**B.** În conformitate cu teorema de medie, pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $h > 0$  arbitrare, există  $c_{x,h} \in (x, x+h)$  astfel încât

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = hf(c_{x,h}),$$

iar condiția **ii)** devine :

$$|f(c_{x,h})| \leq h.$$

Considerând un șir  $(x_n)_{n \geq 1}$  arbitrar de numere reale, astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  și  $x_n > x$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  (deci șirul  $(h_n)_{n \geq 1}$  definit, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , prin  $x_n = x + h_n$ , are proprietățile  $h_n > 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ), obținem :

$$c_{x,h_n} \in (x, x_n),$$

astfel ca :

$$\left| f(c_{x,h_n}) \right| \leq h_n.$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ , din inegalitatea de mai sus, deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{x,h_n})$  există și că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{x,h_n}) = 0.$$

Din  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  decurge că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{x,h_n} = x,$$

iar cum  $f$  este continuă în  $x$ , tragem concluzia că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_{x,h_n}) = f(x) = 0.$$

C. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există  $x_0$  astfel ca :

$$f(x_0) \neq 0.$$

Putem presupune, fără pierderea generalității, că  $f(x_0) > 0$ .

Pentru un  $\varepsilon_0$  fixat, astfel ca  $0 < \varepsilon_0 < f(x_0)$ , deoarece  $f$  este continuă, există  $\delta > 0$  astfel că pentru orice  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , avem :

$$f(x) > \varepsilon_0.$$

Prin urmare, pentru orice  $h \in (0, \delta)$ , avem, conform cu ipoteza :

$$h\varepsilon_0 = \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon_0 dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h^2,$$

deci  $0 < \varepsilon_0 \leq h$ , pentru orice  $h \in (0, \delta)$ , relație care este contradictorie.

Drept urmare,  $f(x) = 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**Comentariu.** Au fost foarte puțini candidații care au reușit să rezolve această problemă. Este cu totul regretabil că nici măcar implicația  $i) \Rightarrow ii)$  nu a fost abordată decât de un foarte mic număr de candidați. Se pare că majoritatea candidaților nu au conștientizat faptul că pentru această problemă era necesar să demonstreze două lucruri, anume  $i) \Rightarrow ii)$  și  $ii) \Rightarrow i)$ , adică, altfel spus, nu au cunoscut semnificația sintagmei ”dacă și numai dacă”.

### III.

#### 1.

Să observăm că pentru  $\lambda = -1, \lambda = \frac{1}{2}$ , dreptele corespunzătoare ale familiei intersectează numai una dintre axele de coordonate, deci aceste valori ale parametrului  $\lambda$  sunt necorespunzătoare.

Un calcul simplu ne conduce la determinarea coordonatelor punctelor  $A$  și  $B$ , anume  $A\left(\frac{2-3\lambda}{\lambda+1}, 0\right)$  și  $B\left(0, \frac{2-3\lambda}{2\lambda-1}\right)$ .

Pentru  $OA=0$  sau  $OB=0$ , adică pentru  $\lambda = \frac{2}{3}$ , expresia  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$  nu are sens, deci și această valoare este necorespunzătoare.

Relația  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 5$  devine

$$(1+\lambda)^2 + (2\lambda-1)^2 = 5(2-3\lambda)^2.$$

Soluțiile ecuației de mai sus, care este echivalentă cu :

$$20\lambda^2 - 29\lambda + 9 = 0,$$

sunt 1 și  $\frac{9}{20}$ . Dreptele cerute sunt :

$$2x + y + 1 = 0 \text{ și } 29x - 2y - 13 = 0.$$

**Comentariu.** Deși această problemă este una de rutină, au existat destui candidați care au efectuat greșit calculele.

**2.** Să observăm că sfera se proiectează ortogonal într-un cerc înscris în rombul de bază, anume  $ABCD$  (fig. 1)

Fie  $E$  proiecția lui  $D$  pe  $BC$ . Este clar că  $DE = d$ .

Deoarece triunghiul  $DEC$  are unghiul  $E$  drept, avem :

$$DC = \frac{d}{\sin \frac{\pi}{4}} = d\sqrt{2}.$$

În conformitate cu teorema celor trei perpendiculare (fig. 2), deoarece  $DD' \perp (ABCD)$  și  $DE \perp BC$ , rezultă că  $D'E \perp BC$ .

Prin urmare,  $D'E$  este înălțime în paralelogramul de secțiune, anume  $A'D'CB$ . Să observăm că  $DD'$  are lungimea egală cu diametrul sferei înscrise, anume  $DD' = d$ . Prin urmare, teorema lui *Pitagora* aplicată în triunghiul dreptunghic  $D'DE$ , ne asigură că  $D'E = d\sqrt{2}$ .

Aria secțiunii căutate este

$$A_{A'D'CB} = BC \cdot D'E = d\sqrt{2} \cdot d\sqrt{2} = 2d^2$$

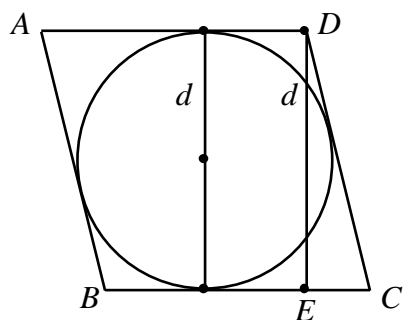


Fig. 1

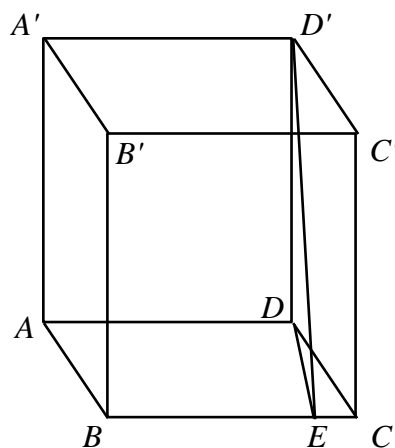


Fig. 2

**Comentariu.** Majoritatea candidaților nu au reușit să rezolve această problemă, principalul obstacol fiind impresia falsă că secțiunea este un dreptunghi.

## SOLUȚII

COLEGIUL DE INFORMATICĂ  
SESIUNEA IULIE 2003



**I.**

1. Avem  $f(x-1) = (x+1)g(x) - 4$ . Pentru  $x = -1$  rezultă  $f(-2) = -4$ , adică  $-8 + 4 - 2a + b = -4$  și deci  $b = 2a$ . Notând  $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$  și utilizând relațiile lui Viète avem  $S_1 = -1$  și  $S_2 = 1 - 2a$ . Deoarece  $x_1^3 + x_1^2 + ax_1 + b = 0$ ,  $x_2^3 + x_2^2 + ax_2 + b = 0$  și  $x_3^3 + x_3^2 + ax_3 + b = 0$ , prin adunare obținem  $S_3 + S_2 + aS_1 + 3b = 0$  și deci  $S_3 = -1 + 2a + a - 3b$ . Din  $S_3 = 8$  rezultă  $a - b = 3$ . Deoarece  $b = 2a$  obținem  $a = -3$  și  $b = -6$ . Ecuația se scrie  $x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$ , adică  $(x-2)(x^2 + 3x + 3) = 0$  și rădăcinile sunt  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ .

**2.**

a) Avem  $D = \begin{vmatrix} 3-2m & 2-m & 1 \\ 2-m & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix}$ . Scăzând a doua linie din

prima, obținem

$$D = \begin{vmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 2-m & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = (1-m)((2-m)^2 - 1) = \\ = (1-m)(1-m)(3-m) = (m-1)^2(3-m).$$

b) Sistemul este compatibil determinat dacă și numai dacă  $D \neq 0$ , adică  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ . Pentru rezolvarea sistemului folosim regula lui Cramer.

$$D_x = \begin{vmatrix} m & 2-m & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = \\ = (m-1)[(2-m)^2 - 1] = -(m-1)^2(3-m).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3-2m & m & 1 \\ 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix}.$$

Scădem ultima linie din celelalte și obținem

$$D_y = \begin{vmatrix} 2(1-m) & m-1 & m-1 \\ 1-m & 0 & m-1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = (m-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix}.$$

Adunăm ultimele coloane la prima

$$D_y = (m-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4-m & 1 & 2-m \end{vmatrix} = (m-1)^2 (4-m) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 (4-m).$$

$$\text{Avem } D_z = \begin{vmatrix} 3-2m & 2-m & m \\ 2-m & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Scădem ultima linie din celelalte}$$

$$\begin{aligned} D_z &= \begin{vmatrix} 2(1-m) & 1-m & m-1 \\ 1-m & 1-m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (m-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(m-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2. \end{aligned}$$

Rezultă

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(m-1)^2 (3-m)}{(m-1)^2 (3-m)} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{(m-1)^2 (x-m)}{(m-1)^2 (3-m)} = \frac{m-4}{m-4},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2 (3-m)} = \frac{1}{3-m}$$

și deci soluția este  $\left(-1, \frac{m-4}{m-3}, \frac{1}{3-m}\right)$  cu  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ .

**II.**

1. Funcția se scrie  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{1-x}, & \text{pentru } x < 0 \\ x+1 & , \text{ pentru } x \geq 0 \end{cases}$ .

a) Avem  $f'_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\frac{(x+1)^2}{1-x} - 1}{x-0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 + 3x}{x(1-x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x+3}{1-x} = 3,$

$f'_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+1-1}{x-0} = 1.$

b) Avem  $D_f = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty$  și

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \infty.$  Asimptotele sunt  $y = x+1$  pentru

$x \rightarrow \infty$  și  $y = -x-3$  pentru  $x \rightarrow -\infty$  deoarece

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x(1-x)} = -1$$

și

$$n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m'x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{(x+1)^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{1-x} = -3.$$

Derivatele funcției sunt

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x+2x+3}{(x-1)^2}, & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & , \text{ pentru } x > 0 \end{cases},$$

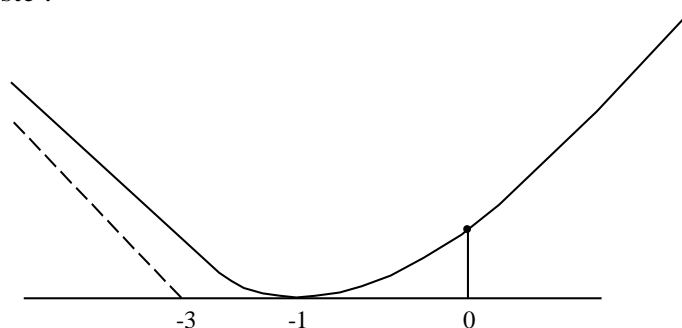
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-8}{(x-1)^3}, & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & , \text{ pentru } x > 0 \end{cases}.$$

Prima derivată se anulează pentru  $-x^2 + 2x + 3 = 0$  și  $x < 0$ . Se obține  $x = -1$ .

Tabelul de variație este

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$\infty$
$f'(x)$	----	-- 0 + + + +		constanta 1
$f''(x)$	+ + + + + + + +			constanta 0
$f(x)$	$\infty$ ↘	0 ↗	1	↗ ↗ $\infty$

Graficul este :



Descompunem în fracții simple. Avem succesiv

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1},$$

$$2x+1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2, \quad 2x+1 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

și deci  $A+C=0$ ,  $A+B=2$ ,  $B=1$  și deci  $A=1$ ,  $B=1$ ,  $C=-1$  adică

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx &= \int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \left( \ln x - \frac{1}{x} - \ln(x+1) \right) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 3 - \ln 1 + 1 + \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA SEPTEMBRIE 2003**

**I.**

1. Fie polinomul  $f(X) = aX^4 + bX^3 - 3$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Să se determine :

i) Câtul și restul împărțirii lui  $f(X)$  la  $X - 1$  ;

ii) Numerele  $a$  și  $b$  astfel încât  $f(X)$  să fie divizibil cu  $(X - 1)^2$ .

2. Fie  $a > 0$  și  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < a\}$ . Pe intervalul  $[0, +\infty)$  definim legea de compoziție  $*$  astfel :

$$x * y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{a^2}}$$

oricare ar fi  $x, y \in [0, +\infty)$ .

Să se arate că :

i)  $A$  este partea stabilă a lui  $[0, +\infty)$  în raport cu  $*$  ;

ii)  $*$  este asociativă, comutativă și cu element neutru ;

iii) Dacă  $x, y, z \in A$  și  $x * y = y * z$ , atunci  $x = y$ .

iv)  $A$  împreună cu operația indusă de  $*$  nu este grup.

**II.**

1. Fie  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definită astfel :

$$f(x) = \sqrt{3 + 2x}.$$

i) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru orice  $x \in [0, +\infty)$ .

ii) Să se arate că  $f$  este crescătoare.

iii) Să se arate că  $f([0, 3]) = [\sqrt{3}, 3]$ .

2. Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ .

### III.

1. Față de sistemul rectangular  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,2)$ ,  $B(-1,1)$ . Pentru triunghiul  $ABO$  să se determine :

- i) perimetrul ;
- ii) ecuațiile înălțimilor din  $A$  și din  $O$  ;
- iii) coordonatele ortocentrului  $H$ .

Să se demonstreze că  $H$ , centrul de greutate  $G$  și centrul cercului circumscris  $C$  sunt colineare.

2. Fie tetraedrul  $ABCD$ , cu lungimile muchiilor  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $AD = 3$  și  $AD \perp (ABC)$ .

- i) Să se determine volumul  $V$  și aria totală  $S$  ale tetraedrului.
- ii) Să se demonstreze că raza  $r$  a sferei înscrise în tetraedru este  $r = \frac{3V}{S}$ . Să se calculeze  $r$ .
- iii) Să se determine raza sferei circumscrise tetraedrului.

## COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA SEPTEMBRIE 2003

### I.

1. Fie expresia

$$E(x) = \frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- i) Să se arate că  $E(x)$  are sens pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- ii) Să se determine valorile parametrului real  $a$  astfel încât inegalitatea  $E(x) \leq 3$  să fie adevărată pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Fie  $x_1, x_2, x_3$  rădăcinile ecuației

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$$

și

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze :

i)  $S_1, S_2, S_3$  ;

ii) determinantul  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ .

**II.**

1. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , unde

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

## SOLUȚII

**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**

**SESIUNEA SEPTEMBRIE 2003**

**I.**

**1.**

i) După împărțire obținem

$$f(X) = (X-1)(aX^3 + (a+b)X^2 + (a+b)X + a+b) + a+b-3$$

și deci  $c(X) = aX^3 + (a+b)X^2 + (a+b)X + a+b$  și  $r = a+b-3$ .

ii)  $f$  se divide la  $(X-1)^2$ , deci  $f(1)=1$  și  $f'(1)=1$ . Cum  $f'(X) = 4aX^3 + 3bX^2$  condițiile se scriu  $a+b-3=0$ ,  $4a+3b=0$ . De aici rezultă  $a=-9, b=12$ .

2.

i) Deoarece  $x, y \geq 0$  rezultă  $x * y = \frac{x+y}{a + \frac{xy}{a^2}} \geq 0$  și arătăm că deși

$x, y \leq a$  rezultă  $x * y \leq a$ , adică  $\frac{x+y}{1 + \frac{xy}{a^2}} \leq a \Leftrightarrow ax + ay \leq a^2 + xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-x)(a-y) \geq 0$  ceea ce este adevărat deoarece  $a-x \geq 0$  și  $a-y \geq 0$ .

ii) Fie  $x, y, z \geq 0$ . Avem

$$(x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{1 + \frac{xy}{a^2}} + z}{1 + \frac{(\frac{x+y}{1 + \frac{xy}{a^2}})z}{a^2 \left(1 + \frac{xy}{a^2}\right)}} = \frac{a^2(ax + y + z) + xyz}{a^2 + xy + yz + zx}.$$

Analog se arată că  $x \neq (y * z) = \frac{a^2(x + y + z) + xyz}{a^2 + xy + yz + zx}$  și deci pentru orice

$x, y, z \geq 0$  avem  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , adică legea este "asociativă".

Comutativitatea rezultă din  $x * y = \frac{x+y}{1 + \frac{xy}{a^2}} = \frac{y+x}{1 + \frac{yx}{a^2}} = y * x$ , pentru  $x, y \geq 0$ .

Determinăm  $e \geq 0$  astfel încât pentru  $\forall x \geq 0$  să avem  $x * e = e * x = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1 + \frac{xe}{a^2}} = x \Leftrightarrow e(x^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow e = 0$ . Așadar elementul

neutru este  $e = 0$ .

iii) Pentru  $x, y, z \in [0, a)$  avem succesiv

$$\begin{aligned} x * z = y * z &\Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{x+z}{1 + \frac{xz}{a^2}} = \frac{y+z}{1 + \frac{yz}{a^2}} \Leftrightarrow \frac{a^2(x+z)}{a^2 + xz} = \frac{a^2(y+z)}{a^2 + yz} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2 + yz)(x+z) = (a^2 + xz)(y+z) \Leftrightarrow (x-y)(a^2 - z^2) = 0. \end{aligned}$$



Cum  $a^2 - z^2 > 0$  rezultă  $x = y$  și deci  $x * z = y * z \Leftrightarrow x = y$ .

iv) Pentru orice  $x \in [0, a)$  căutăm  $x'$  astfel ca  $x * x' = x' * x = e \Leftrightarrow$   

$$\Leftrightarrow \frac{x + x'}{1 + \frac{xx'}{a^2}} = 0 \Leftrightarrow x' = -x.$$
 Pentru orice  $x \in (0, a)$  rezultă  $x' \in A$  și deci

$(A, *)$  nu este grup.

## II.

### 1.

i) Avem  $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{3+2x}} = \frac{1}{\sqrt{3+2x}}.$

ii) Cum  $f'(x) > 0$  rezultă că  $f$  este strict crescătoare.

iii) Deoarece  $f$  este strict crescătoare, minimumul său pe  $[0, 3]$  este  $f(0) = \sqrt{3}$ , iar maximumul este  $f(3) = \sqrt{3+2 \cdot 3} = 3$ . Cum  $f$  este continuă rezultă că  $f$  are proprietatea lui Darboux și deci  $f([0, 3]) = [\sqrt{3}, 3]$ .

2. Avem  $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2 \ln 2}.$

## III.

### 1.

i) Deoarece  $O(0,0), A(1,2), B(-1,1)$  rezultă  $OA = \sqrt{5}, OB = \sqrt{2}$  și  $AB = \sqrt{5}$ . Așadar perimetrul este  $2\sqrt{5} + \sqrt{2}$ .

ii) Panta lui  $AB$  este  $m_{AB} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$  și deci panta înălțimii din  $O$  este  $-2$ . Ecuația înălțimii din  $O$  este  $y = -2x$ . Ecuația înălțimii din  $A$  este  $y = x + 1$ . Rezolvând sistemul  $\begin{cases} y = -2x \\ y = x + 1 \end{cases}$  se determină coordonatele ortocentrului și se obține  $H\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

iii) Deoarece  $OA = OB$  rezultă că triunghiul este isoscel și deci înălțimea din  $A$  este mediană și mediatoare. Deci punctele  $H, G, C$  se

găesc pe înălțime, adică sunt coliniare. Fie  $E$  proiecția lui  $A$  pe  $BC$ . Din teorema celor trei perpendiculare avem  $DE \perp BC$ .  
 $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$  ;  $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$  și  
 aria  $(ABC) = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ , aria  $(DAC) =$  aria  $(DAB) = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$  · aria  
 $(DBC) = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ . Aria totală este  $S = 12 + \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 15 = 42$ . Volumul este

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{\text{aria}(ABC) \cdot AD}{2} = \frac{12 \cdot 3}{3} = 12.$$

ii) Dacă  $I$  este centrul sferei înscrise și  $r$  este raza sa atunci relația

$$\text{vol}(ABCD) = \text{vol}(IABC) + \text{vol}(IACD) + \text{vol}(IABD) + \text{vol}(IBCD)$$

devine  $V = \frac{r}{3} (\text{aria}(ABC) + \text{aria}(ACD) + \text{aria}(ABD) + \text{aria}(BCD))$  și

deci  $r = \frac{3V}{S}$ . Rezultă de aici  $r = \frac{3 \cdot 12}{42} = \frac{6}{7}$ .

iii) Fie  $O$  centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ . Raza acestui cerc se calculează după formula  $R = \frac{abc}{4S}$  și deci

$$AO = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \text{aria}(ABC)} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \frac{25}{8}.$$

Centrul  $P$  al sferei circumscrise tetraedrului  $(ABCD)$  se află la intersecția perpendicularei în  $O$  pe planul  $(ABC)$  cu planul mediator al lui  $AD$ . Raza  $\rho$  este dată de

$$\rho = AP = \sqrt{AO^2 + OP^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{8} \sqrt{769}.$$

## SOLUȚII

### COLEGIUL DE INFORMATICĂ SESIUNEA SEPTEMBRIE 2003

#### I.

##### 1.

i) Condiția  $1 - x + x^2 \neq 0$  este îndeplinită deoarece ecuația  $x^2 - x + 1 = 0$  nu are rădăcini reale.

ii) Inegalitatea  $E(x) \leq 0, \forall x$  se scrie  $2 - ax - x^2 \leq 3(1 - x + x^2)$ ,  
 $\forall x$ , adică  $4x^2 - (a+3)x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Condiția este  
 $D = (a+3)^2 - 16 \leq 0$ , adică  $a \in [-7, 1]$ .

##### 2.

i) Relațiile lui Viète sunt :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2.$$

$$x_1x_2x_3 = -17$$

Avem deci

$$S_1 = 2$$

$$S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Cum  $x_1, x_2, x_3$  verifică ecuația, avem

$$x_1^3 - 2x_1^2 + 2x_1 + 17 = 0$$

$$x_2^3 - 2x_2^2 + 2x_2 + 17 = 0.$$

$$x_3^3 - 2x_3^2 + 2x_3 + 17 = 0$$

Adunând aceste relații obținem

$$S_3 - 2S_2 + 2S_1 + 51 = 0$$

și deci  $S_3 = -55$ .

ii) Dezvoltând determinantul după prima linie rezultă

$$D = 3x_1x_2x_3 - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = -51 + 55 = 4.$$

## II.

1. Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ .

2. Domeniul de definiție rezultă din condiția  $x+1 \neq 0$ . Așadar,  
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$  și deci

$y=1$  este asimptotă orizontală pentru  $x \rightarrow \pm\infty$ .

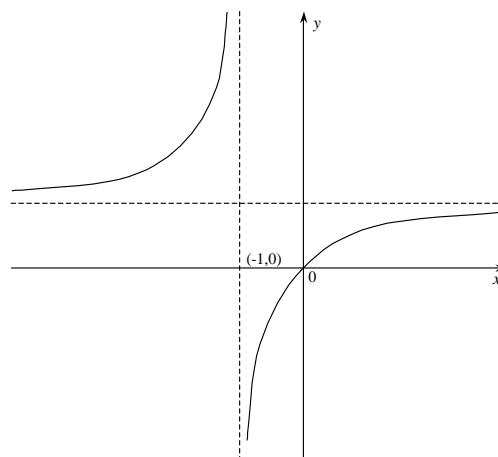
Avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{-1-0-1} = \infty$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$  și deci  $x=-1$

este asimptotă verticală. Avem  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$  și  $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$  și

tabelul de variație este

$x$	$-\infty$	$-1$	$\infty$
$f'(x)$	$+$ $+$ $+$ $+$	$+$ $+$ $+$ $+$	
$f(x)$	$1$ $\nearrow$	$\infty$ $\nearrow$ $-\infty$	$1$
$f''(x)$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$	

Graficul este schițat în figura de mai jos :



**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2004**

**I. Algebră**

1. Fie polinomul  $f(X) = X^4 + 4X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ .

i) Determinați numerele reale  $a, b, c$  astfel încât  $f(-1+i) = 0$ , iar restul împărțirii polinomului  $f(X)$  la  $X+1$  este egal cu  $-2$ .

ii) Pentru numerele  $a, b, c$  determinate la punct i), găsiți rădăcinile polinomului  $f(X)$ .

2. Fie  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$ . Arătați că :

i) Dacă  $A, B \in G$ , atunci  $A \cdot B \in G$ .

ii)  $G$  împreună cu înmulțirea matricelor este grup abelian.

iii) Funcția  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ ,  $f(x+iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ , este un izomorfism

de la grupul multiplicativ  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  la grupul  $(G, \cdot)$ , unde  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ .

**II. Analiză matematică**

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 3^x$ .

i) Să se calculeze  $f'$  și să se arate că  $f$  este strict crescătoare.

ii) Să se calculeze  $f''$  și să se arate că  $f$  este funcție convexă.

iii) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{3^n}$ .

2. Fie funcția  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x-3}{x^3+1}$ .

i) Să se găsească numerele reale  $A, B, C$  astfel încât să avem :

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

pentru orice  $x \in [1, 2]$ .

ii) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) dx$ .

### III. Geometrie și trigonometrie

1. Se consideră cercul de ecuație  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$  și dreapta de ecuație  $x + y - a = 0$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ . Să se determine valorile parametrului  $a$  astfel încât dreapta să fie exterioară cercului.

2. Într-un tetraedru  $ABCD$  se consideră că  $AC \perp BD$ . Să se arate că secțiunea determinată de intersecția tetraedrului cu un plan paralel cu muchiile  $AC$  și  $BD$  este un dreptunghi.

### IV. Informatică

Se consideră tabloul de numere reale  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Se cer următoarele:

i) Un algoritm pentru ordonarea crescătoare elementelor tabloului  $A$ .

ii) Un algoritm performant (preferabil liniar) pentru eliminarea dublurilor din tabloul astfel ordonat.

iii) Presupunând că  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt coordonatele a  $n$  persoane aflate pe o dreaptă, să se determine o coordonată  $x$ , cu proprietatea că aducerea tuturor celor  $n$  persoane pe poziția  $x$  să se realizeze cu efort total minim (efortul pentru o persoană este distanța de la poziția sa inițială la poziția  $x$ ).

**Exemplu :** Pentru  $A = (1, 3, 1, 6, 9, 6, 2)$ :

1)  $(1, 1, 2, 3, 6, 6, 9)$  ;    2)  $(1, 2, 3, 6, 9)$  ;    3)  $x = 3$ .

**Precizări.** Pentru fiecare algoritm veți scrie ideea soluției, precum și complexitatea sa în timp (în funcție de  $n$ ). Nu pot fi folosite tablouri suplimentare. Datele de intrare ( $n$  și  $A$ ) se consideră citite, iar pentru datele de ieșire se va preciza locația lor. Pentru unul dintre primele două puncte se va da soluția și sub forma unei proceduri/funcții Pascal, C sau C++, în rest fiind suficient pseudocod.

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ SESIUNEA IULIE 2004

#### I. Algebră

##### 1.

i) Deoarece  $f \in \mathbb{R}[X]$ , cum  $f(-1+i)=0$ , deducem că  $f(-1-i)=0$ , deci restul împărțirii polinomului  $f(X)$  la  $(X - (-1+i))(X - (-1-i))$ , adică la  $X^2 + 2X + 2$ , este 0. Cum

$$X^4 + 4X^3 + aX^2 + bX + c = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X + a - 6) + (-2a + b + 8)X + c - 2a + 12,$$

deducem că :

$$-2a + b + 8 = 0 ; \quad c - 2a + 12 = 0 \quad (*)$$

Cum restul împărțirii polinomului  $f(X)$  la  $X + 1$  este egal cu  $f(-1)$ , deducem că  $f(-1) = -2$ , adică :

$$a - b + c = 1 \quad (**)$$

Sistemul dat de ecuațiile (\*) și (\*\*) are soluțiile  $a = 5$ ,  $b = 2$  și  $c = -2$ .

ii) Având în vedere cele stabilite la punctul i), ecuația  $f(X) = 0$  se scrie :

$$(X^2 + 2X + 2)(X^2 + 2X - 1) = 0.$$

Soluțiile ei, deci rădăcinile polinomului  $f(X)$ , sunt

$$-1+i, -1-i, -1-\sqrt{2}, \text{ și } -1+\sqrt{2}.$$

##### 2.

i) Dacă notăm cu  $A_{x,y}$  matricea  $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in G$ , atunci :

$$A_{x_1, y_1} \cdot A_{x_2, y_2} = A_{x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1}.$$

Cum  $(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \neq 0$ , deoarece  $(x_1^2 + y_1^2) \neq 0$  și  $(x_2^2 + y_2^2) \neq 0$  (căci  $A_{x_1, y_1}, A_{x_2, y_2} \in G$ ), deducem că :

$$A_{x_1, y_1} \cdot A_{x_2, y_2} \in G.$$

*ii)* După cum am văzut la *i)*, înmulțirea matricelor din  $G$  este o lege de compoziție pe  $G$ , adică înmulțirea a două matrice din  $G$  este o matrice din  $G$ .

Este binecunoscut faptul că înmulțirea matricelor este asociativă, deci înmulțirea matricelor din  $G$  este asociativă.

Există  $I_2 \in G$  (deoarece  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $1^2 + 0^2 = 1 \neq 0$ ) astfel încât

$I_2 \cdot A = A \cdot I_2$ , pentru orice  $A \in G$ . Prin urmare  $I_2$  este elementul neutru pentru înmulțirea matricelor din  $G$ .

Pentru orice  $A_{x, y} \in G$ , există  $A_{\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}} \in G$  (deoarece  $x^2 + y^2 \neq 0$

și deci :  $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \neq 0$ ), astfel încât :

$$A_{x, y} \cdot A_{\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}} = A_{1,0} = I_2,$$

deci orice element din  $G$  este inversabil.

Ca atare  $(G, \cdot)$  este grup.

Deoarece pentru orice  $A_{x_1, y_1}, A_{x_2, y_2} \in G$ , avem :

$$A_{x_1, y_1} \cdot A_{x_2, y_2} = A_{x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1},$$

și :

$$A_{x_2, y_2} \cdot A_{x_1, y_1} = A_{x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2},$$

deducem că :

$$A_{x_1, y_1} \cdot A_{x_2, y_2} = A_{x_2, y_2} \cdot A_{x_1, y_1},$$

pentru orice  $A_{x_1, y_1}, A_{x_2, y_2} \in G$ .

Prin urmare  $(G, \cdot)$  este grup abelian.

*iii)* Pentru început să observăm că  $f$  este bine definită deoarece, dacă,  $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ , atunci  $|z|^2 = x^2 + y^2 \neq 0$ , deci  $f(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in G$ .



Deoarece pentru orice  $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in G$ , există  $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$  (deoarece  $x^2 + y^2 \neq 0$ ) astfel încât :

$$f(z) = A_{x,y},$$

rezultă că  $f$  este surjectivă.

Deoarece pentru orice  $A_{x_1,y_1}, A_{x_2,y_2} \in G$ , astfel încât  $f(A_{x_1,y_1}) = f(A_{x_2,y_2})$ , rezultă  $\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ , deci  $x_1 = x_2$  și  $y_1 = y_2$  de unde  $A_{x_1,y_1} = A_{x_2,y_2}$ , deducem că  $f$  este injectivă.

Așadar  $f$  este bijectivă.

Deoarece pentru orice  $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}^*$  și  $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}^*$ , avem:

$$f(z_1 \cdot z_2) = f(x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)) = A_{x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1},$$

deducem că :

$$f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2),$$

pentru orice  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ , deci  $f$  este morfism.

În concluzie,  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ ,  $f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ , este un izomorfism de la grupul multiplicativ  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  la grupul  $(G, \cdot)$ .

**Comentariu.** La punctul *i*) mulți dintre candidați nu au verificat că suma elementelor de pe prima coloană a produsului a două matrice din  $G$  este nenulă. Majoritatea candidaților au rezolvat subpunctele *ii*) și *iii*), deși a existat și un număr relativ însemnat de lucrări în care axiomele din definiția grupului apăreau neînsoțite de cuantificatorii logici corespunzători sau cu acești cuantificatori într-o ordine necorespunzătoare.

## II. Analiză matematică

### 1.

*i*) Avem  $f'(x) = 1 + 3^x \ln 3 > 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este strict crescătoare.

*ii*) Avem  $f'' = 1 + 3^x (\ln 3)^2 > 0$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este funcție convexă.

iii) Avem

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(n) &= 1 + 2 + \dots + n + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3^n - 1}{3 - 1}, \end{aligned}$$

de unde :

$$\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{3^n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 3 \frac{3^n - 1}{2}}{3^n} = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 3^n} + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right).$$

Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2 \cdot 3^n} = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) = 1$ , deducem că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

**Comentariu.** Cu părere de rău trebuie să spunem că destui candidați au avut dificultăți în a deriva corect funcția  $x \rightarrow 3^x$ . Punctul **iii)** al problemei a fost rezolvat corect de către puțini candidați. Menționăm că acest punct poate fi rezolvat și cu ajutorul lemei lui *Stolz-Cesàro*.

2.

i) Egalitatea din enunț revine, după efectuarea calculelor, la :

$$3x - 3 = (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + A + C,$$

pentru orice  $x \in [1, 2]$  de unde obținem sistemul :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 3 \\ A + C = -3 \end{cases}$$

care are soluția  $A = -2$ ,  $B = 2$  și  $C = -1$ .

ii) Folosind i), avem :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left( \frac{-2}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) dx = \int_1^2 \frac{-2}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} = \\ &= -2 \ln(x+1) \Big|_1^2 + \ln(x^2-x+1) \Big|_1^2 = -2(\ln(3) - \ln(2)) + \ln(3) = \\ &= 2 \ln(2) - \ln(3) = \ln(4) - \ln(3) = \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Comentariu.** Acest subiect a fost rezolvat de către majoritatea candidaților. Cei care nu au reușit să-l rezolve au efectuat, de regulă, în mod eronat calculele.

### III. Geometrie și trigonometrie

1. Vom prezenta două soluții.

**A.** Pentru ca dreapta să fie exterioară cercului, trebuie ca sistemul :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x + y - a = 0, \end{cases}$$

să nu aibă soluție, adică trebuie ca următoarea ecuație de gradul 2 :

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 2a - 2 = 0,$$

să aibă discriminantul strict negativ. Aceasta revine la  $-a^2 + 4a + 4 < 0$ , ceea ce înseamnă  $a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, \infty)$ .

**B.** Pentru ca dreapta dată să fie exterioară cercului, trebuie ca distanța de la centrul cercului la dreaptă să fie strict mai mare decât raza cercului.

Deoarece cercul se scrie sub forma  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ , centrul său este  $(1,1)$ , iar raza sa este 2. Cum distanța de la punctul  $(1,1)$  la dreaptă este  $\frac{|2-a|}{\sqrt{2}}$ , soluția problemei este dată de soluția inegalității  $|2-a| > 2\sqrt{2}$ .

Atunci soluția problemei este :

$$a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, \infty).$$

**Comentariu.** Numărul candidaților care au rezolvat acest subiect a fost mare. Cei mai mulți dintre ei au urmat calea prezentată la **A**.

2. Să presupunem că planul  $\alpha$ , paralel cu muchiile  $AC$  și  $BD$ , intersectează muchiile  $AB$  în  $M$ ,  $BC$  în  $N$ ,  $CD$  în  $P$  și  $AD$  în  $Q$ . Prin urmare, dorim să arătăm că  $MNPQ$  este dreptunghi. Planul  $ABC$ , care conține dreapta  $AC$ , intersectează planul  $\alpha$ , care este paralel cu dreapta  $AC$ , după dreapta  $MN$  paralelă cu  $AC$ . Analog se arată că  $PQ$  este

paralelă cu  $AC$ . Prin urmare  $MN$  este paralelă cu  $PQ$ . Similar se demonstrează că  $MQ$  este paralelă cu  $PN$ . Deci  $MNPQ$  este paralelogram. Deoarece  $MQ \parallel BD, MN \parallel AC$  și  $AC \perp BD$ , deducem că  $MN \perp MQ$ , deci  $MNPQ$  este dreptunghi.

**Comentariu.** Numărul candidaților care au rezolvat acest subiect a fost redus, el constituind un obstacol major pentru mulți candidați.

#### IV. Informatică

i) Există o mare varietate de algoritmi pentru ordonarea crescătoare a elementelor unui tablou de numere reale (multe prezente în programa de liceu) : sortare prin inserție binară, sortare prin interclasare, sortare rapidă, sortare prin metoda bulelor etc. Se cunoaște că timpul optim este  $O(\log n)$ , unde  $n$  este numărul elementelor tabloului. Întrucât s-a cerut clar un algoritm oarecare, a fost acceptat orice algoritm corect. Unul dintre cei mai simpli algoritmi este următorul :

- se determină  $a_k = \max \{a_1, \dots, a_n\}$  și se face interschimbarea  $a_k \leftrightarrow a_n$  ; numărul de comparații este  $n-1$  ;

- se determină  $a_k = \max \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  și se face interschimbarea  $a_k \leftrightarrow a_{n-1}$  ; numărul de comparații este  $n-2$  ;

.....  
- se determină  $a_k = \max \{a_1, a_2\}$  și se face interschimbarea

$a_k \leftrightarrow a_2$  ; numărul de comparații este 1.

**for**  $u = n, 2, -1$

$\max \leftarrow a_1; k \leftarrow 1$

**for**  $i = 2, u,$

**if**  $a_i > \max$

**then**  $\max \leftarrow a_i; k \leftarrow i$

**endfor**

$a_k \leftarrow a_u; a_u \leftarrow \max$

**endfor**

Complexitatea în timp a algoritmului este  $O(n^2)$ , deoarece se fac  $(n-1)+(n-2)+\dots+1$  comparații între elementele tabloului.

ii) Pentru eliminarea dublurilor este nevoie de o singură parcurgere a tabloului, deci complexitatea în timp a algoritmului este  $O(n)$ , adică liniară. Fie  $i$  poziția curentă analizată și  $u$  numărul elementelor distincte din  $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ , elemente ce apar acum pe primele  $u$  poziții ale tabloului  $A$ .

```

u ← 1
for i = 2, n
    if a_i ← a_u
        then u ← u + 1; a_u ← a_i
endfor

```

iii) Formularea matematică este : să se determine  $x$  care minimizează funcția  $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ . Din păcate funcția  $f$  nu este derivabilă.

Se pleacă de la faptul că elementele tabloului  $A$  sunt sortate crescător și se raționează prin inducție :

- pentru  $n = 1$  este evident că  $x = a_1$  ;
- pentru  $n = 2$ ,  $x$  poate fi orice valoare din intervalul  $[a_1, a_2]$ , deoarece pentru un astfel de  $x$  avem  $f(x) = a_2 - a_1$ , iar pentru un  $y$  în afara acestui interval avem  $f(y) > f(x)$  ;
- pentru  $n = 3$  : din punctul de vedere al elementelor  $a_1$  și  $a_3$ ,  $x$  poate fi ales arbitrar în  $[a_1, a_3]$  ; prezența lui  $a_2$  impune însă valoarea  $x = a_2$  ;

.....

- pentru  $n = 2k + 1$ ,  $x = a_{k+1}$  ;
- pentru  $n = 2k$ ,  $x$  poate fi ales arbitrar în  $[a_k, a_{k+1}]$ .

În concluzie, este suficientă atribuirea  $x \leftarrow a_{[(n+1)/2]}$  cu explicațiile necesare. Să observăm că această soluție nu depinde de existența dublurilor în tabloul  $A$ .

A fost acceptată și soluția care presupune fără demonstrație că  $x$  poate fi ales ca unul dintre elementele tabloului, calculează valorile lui  $f$  în aceste puncte și determină valoarea minimă. Motivul este că în concursurile de elevi proba se dă pe calculator, verificarea este automată și deci se ține cont doar de valoarea produsă la ieșire și de timpul de lucru, deci nu de raționamentul/algoritm prin care elevul a ajuns la această valoare.

**Comentariu.** Forma simplă a algoritmilor de la primele două subiecte nu a ridicat candidaților probleme la implementarea lor într-un limbaj de programare admis. Proba de informatică s-a redus la cunoștințe de clasa a IX-a plus istețime !

**Notă.** Timpul de lucru a fost de 3 ore. S-a cerut să se trateze 3 subiecte la alegere.

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**  
**CONCURS DE ADMITERE**  
**DOMENIUL DE LICENȚĂ MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2005**

**I. Algebră**

Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B,$$

unde  $t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

1. Să se calculeze  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $AB$ ,  $BA$ .

2. Să se arate că :

i) Dacă  $t, t' \in \mathbb{R}^*$ , atunci  $M_t M_{t'} = M_{tt'}$ .

ii)  $G = \{M_t \mid t \in \mathbb{R}^*\}$  este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

iii) Funcția  $f: (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$  este izomorfism de grupuri, unde  $f(t) = M_t$ .

**II. Analiză matematică**

Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & \text{pentru } x \neq 1 \\ 1, & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$ .

i) Să se arate că funcția  $f$  este continuă.

ii) Să se găsească asimptotele graficului funcției  $f$ .

iii) Să se calculeze  $\int_1^2 x^2 f(x+1) dx$ .

**III. Geometrie**

1. Se consideră în plan familia de cercuri  $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 3 = 0$  unde  $\alpha$  este un parametru real.

*i)* Să se arate că există două puncte prin care trec toate cercurile familiei.

*ii)* Să se determine cercul de rază minimă din familie.

*iii)* Să se scrie ecuațiile cercurilor din familie care sunt tangente axei  $Oy$ .

#### **IV. Informatică**

Se consideră două numere naturale strict pozitive  $a, b$  reprezentabile în calculator. Să se scrie proceduri / funcții pentru listarea :

*i)* Numărului  $c$  obținut prin inversarea ordinii cifrelor lui  $b$ .

*ii)* Unei cifre care apare de cele mai multe ori în scrierea lui  $a$ .

*iii)* Celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun al lui  $a$  și  $b$ .

Cel puțin una dintre proceduri / funcții va fi scrisă în *Pascal*, *C* sau *C++*, iar celelalte în pseudocod.



## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ DOMENIUL DE LICENȚĂ MATEMATICĂ SESIUNEA IULIE 2005

I.

1. Un calcul simplu arată că  $A^2 = 3A, B^2 = 3B$  și că  $AB = BA = O_3$ .

2.

i) Avem

$$\begin{aligned} M_t M_{t'} &= \left( \frac{t}{3} A + \frac{1}{3t^2} B \right) \left( \frac{t'}{3} A + \frac{1}{3(t')^2} B \right) = \frac{tt'}{9} A^2 + \frac{1}{9(tt')^2} B^2 = \\ &= \frac{tt'}{3} A + \frac{1}{3(tt')^2} B = M_{tt'}, \end{aligned}$$

pentru orice  $t, t' \in \mathbb{R}^*$

ii) Punctul anterior arată că  $\bullet$  este lege de compoziție pe  $G$ .

Pentru  $t, t', t'' \in \mathbb{R}^*$ , avem

$$(M_t M_{t'}) M_{t''} = M_{(tt')t''} = M_{t(t't'')} = M_t (M_{t'} M_{t''}),$$

deci  $\bullet$  pe  $G$  este asociativă.

$M_1 \in G$  este elementul neutru la  $\bullet$  pe  $G$ .

Simetricul elementului  $M_t, t \in \mathbb{R}^*$  este  $M_{1/t}$ .

iii) Dacă  $f(t) = f(t')$ ,  $t, t' \in \mathbb{R}^*$ , atunci

$$\frac{t}{3} A + \frac{1}{3t^2} B = \frac{t'}{3} A + \frac{1}{3(t')^2} B$$

de unde, prin înmulțirea la stânga, cu  $A$ , obținem  $tA = t'A$ , deci  $t = t'$ .

Așadar,  $f$  este injectivă.

Evident  $f$  este surjectivă.

Prin urmare,  $f$  este bijectivă.

Deoarece, pentru orice  $t, t' \in \mathbb{R}^*$ , avem

$$f(tt') = M_{tt'} = M_t M_{t'} = f(t)f(t'),$$

deducem că  $f$  este morfism de grupuri.

## II.

i) Este evident că în orice punct al mulțimii  $(0, \infty) - \{1\}$  funcția  $f$  este continuă.

Deoarece există  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$ , conform cu regula lui

l'Hospital, avem  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$ . Cum 1 este punct de acumulare al mulțimii  $(0, \infty)$ , deducem că  $f$  este continuă în 1.

Prin urmare,  $f$  este continuă.

ii) Deoarece există  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , conform cu regula lui

l'Hospital, avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Prin urmare, dreapta  $y = 0$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$  pentru graficul funcției  $f$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ , deducem că dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală pentru graficul funcției  $f$ . Întrucât, pentru orice  $x_0 \in (0, \infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ , nu mai există alte asimptote verticale pentru graficul funcției  $f$ .

iii) Avem, pentru  $x \in (0, \infty) - \{1\}$ ,

$$f'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$$

Pentru a studia derivabilitatea lui  $f$  în punctul 1 vom studia limita

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}.$$

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x - x + 1)'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

conform cu regula lui l'Hospital deducem că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$ , deci

$$f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Aşadar, } f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

Fie  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , dată de  $g(x) = x - 1 - x \ln x$ . Atunci  $g'(x) = -\ln x$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

Prin urmare,  $g'(x) > 0$ , pentru  $x \in (0, 1)$  şi  $g'(x) < 0$ , pentru  $x \in (1, \infty)$ , deci  $g$  este crescătoare pe  $(0, 1)$  şi descrescătoare pe  $(1, \infty)$ , de unde  $g(x) \leq g(1) = 0$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ .

Aşadar,  $f'(x) \leq 0$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ , deci  $f$  este descrescătoare.

**iv) Avem**

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 f(x+1) dx &= \int_1^2 x^2 \frac{\ln(x+1)}{x} dx = \int_1^2 \left( \frac{x^2}{2} \right)' \ln(x+1) dx = \\ &= \frac{x^2 \ln(x+1)}{2} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \frac{1}{x+1} dx = \frac{4 \ln 3 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = \\ &= \frac{4 \ln 3 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left( \int_1^2 (x-1) dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \right) = \frac{4 \ln 3 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 + \ln(x+1) \Big|_1^2 \right) = \\ &= \frac{4 \ln 3 - \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 \right) = \frac{4 \ln 3 - \ln 2}{2} - \frac{\ln 3 - \ln 2}{2} - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{3 \ln 3}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

### III.

*i)* Fie  $(x_0, y_0)$  un punct care aparține cercului  $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 3 = 0$ , pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Atunci  $x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 3 - 2\alpha y_0 = 0$ , pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ , deci  $x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$  și  $2y_0 = 0$ , de unde  $y_0 = 0$  și  $x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$ , deci  $x_0 = 1$  și  $y_0 = 0$  sau  $x_0 = 3$  și  $y_0 = 0$ .

Așadar, punctele  $(1, 0)$  și  $(3, 0)$  aparțin cercului  $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 3 = 0$ , pentru orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*ii)* Ecuația cercului  $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 3 = 0$  se rescrie sub forma  $(x-2)^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha^2 + 1$ , deci raza acestui cerc este  $\sqrt{\alpha^2 + 1}$ . Prin urmare, cercul de rază minimă din familie este cel de rază 1.

*iii)* Condiția ca cercul  $x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 3 = 0$  să fie tangent axei  $Oy$  este ca sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2\alpha y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

să aibă soluție unică. Aceasta revine la a spune că ecuația  $y^2 - 2\alpha y + 3 = 0$  are soluție unică. Prin urmare, discriminantul acestei ecuații trebuie să fie zero, adică  $4\alpha^2 - 4 \cdot 3 = 0$ , de unde  $\alpha \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ .

Așadar, ecuațiile cercurilor din familie care sunt tangente axei  $Oy$  sunt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{3}y + 3 &= 0 \text{ și} \\ x^2 + y^2 - 4x + 2\sqrt{3}y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

### IV.

*i)* Dacă  $b = (b_k b_{k-1} \dots b_0)_{10} = b_k \cdot 10^k + b_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0$ , atunci numărul  $c$  căutat este  $b_0 \cdot 10^k + b_1 \cdot 10^{k-1} + \dots + b_{k-1} \cdot 10 + b_k$  și deci:

```
c ← 0; x ← b;
while x > 0 do
    rest ← restul împărțirii lui x la 10;
    x ← câtul împărțirii lui x la 10;
    c ← c·10+rest
write c
```

**ii)** La fel ca la punctul precedent, detectăm cifrele lui  $b$  și numărăm de câte ori apar ele, după care determinăm una dintre cifrele cu cele mai multe apariții:

```

x ← a;
for i=0,9 do apari ← 0;
while x>0 do
    rest ← restul împărțirii lui x la 10;
    aparrest ← aparrest + 1
    x ← câtul împărțirii lui x la 10;
cifra ← 0;
for i=1,9 do
    if apari > aparcifra then cifra ← i
write cifra

```

**iii)** Există o mare varietate de algoritmi pentru determinarea celui mai mare divizor comun  $d$  a două numere naturale  $a$  și  $b$ , dintre care alegem algoritmul lui Euclid. În plus folosim relația  $[a, b] = a \cdot b / d$ .

```

x ← a; y ← b;
while y ≠ 0
    rest ← restul împărțirii lui x la y;
    x ← y; y ← rest
write x, a*b/x

```

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**  
**CONCURS DE ADMITERE**  
**DOMENIUL DE LICENȚĂ INFORMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2005**

**I. Algebră**

Fie  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$

1) Să se arate că  $G$ , împreună cu înmulțirea numerelor complexe, este grup izomorf cu  $(\mathbb{Z}_3, +)$ .

2) Fie  $\varepsilon \in G \setminus \{1\}$  și matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Să se calculeze  $A^2, A^3, A^4$ .

ii) Să se arate că  $A$  este inversabilă și să se calculeze  $A^{-1}$ .

iii) Să se rezolve ecuațiile matriceale :  $AX = B, YA = B$ .

**II. Analiză matematică**

Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ .

i) Să se studieze derivabilitatea lui  $f$  și să se calculeze  $f'$ .

ii) Să se reprezinte grafic funcția  $f$ .

iii) Fie un număr  $a > 0$  și fie șirul  $(x_n)_n$  definit astfel :

$$x_0 = a; \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Să se arate că șirul  $(x_n)_n$  este mărginit și monoton și să se calculeze limita lui.

iv) Să se calculeze  $\int_{-1}^2 f(x) dx$ .

### III. Geometrie

Fie  $ABCD$  un pătrat de latură 1. Considerăm punctele variabile  $M$  și  $N$  pe latura  $AB$ , respectiv  $BC$ , astfel încât  $AM = BN$ .

Să se determine mulțimea punctelor care sunt mijloacele segmentelor  $MN$ .

### IV. Informatică

Se consideră două numere naturale  $n, k$  cu  $1 \leq k \leq n \leq 15$ , precum și un vector  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  cu elemente numere naturale astfel încât  $1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq n$  reprezentate în memoria calculatorului. Să se scrie proceduri / funcții pentru listarea :

i) Numărului binomial  $C_n^k$ , efectuând un număr cât mai mic de înmulțiri / împărțiri.

ii) Unei valori  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  pentru care  $C_n^i$  are valoarea maximă.

iii) Succesorului în ordinea lexicografică al lui  $c$  ipoteza

$$c \neq (n-k+1, \dots, n-1, n).$$

Cel puțin una dintre proceduri / funcții va fi scrisă în *Pascal*, *C* sau *C++*, iar celelalte în pseudocod.

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ DOMENIUL DE LICENȚĂ INFORMATICĂ SESIUNEA IULIE 2005

#### I.

1. Fie  $z_1, z_2 \in G$ . Atunci  $z_1^3 = z_2^3 = 1$ , de unde  $(z_1 \cdot z_2)^3 = z_1^3 \cdot z_2^3 = 1$ , deci  $z_1 \cdot z_2 \in G$ . Așadar,  $\cdot$  este lege de compoziție pe  $G$ . Evident  $\cdot$  este asociativă, iar elementul neutru la  $\cdot$  este  $1 \in G$ . Pentru orice  $z \in G$ , există  $\frac{1}{z} \in G$  deoarece  $\left(\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{z^3} = 1\right)$  astfel încât

$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$ . Prin urmare,  $(G, \cdot)$  este grup. Ecuația  $z^3 = 1$  are soluțiile  $z_0 = 1, z_1$  și  $z_2 = z_1^2$ , unde  $z_1$  este una dintre soluțiile ecuației  $z^2 + z + 1 = 0$ .

Fie  $f: (G, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_3, +)$  dată de  $f(z_0) = \hat{0}$ ,  $f(z_1) = \hat{1}$  și  $f(z_2) = \hat{2}$ . Evident  $f$  este bijectivă. Se verifică ușor că  $f$  este morfism. Deci  $f$  este un izomorfism de grupuri.

#### 2.

i) Având în vedere că  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$  și că  $\varepsilon^3 = 1$ , un calcul simplu

arată că  $A^2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$  și că  $A^4 = 9 \cdot I_3$ .

ii) Deoarece  $A \cdot \left(\frac{1}{9} A^3\right) = \left(\frac{1}{9} A^3\right) \cdot A = I_3$ , pe baza unicității

inversei unei matrici, deducem că  $A^{-1} = \frac{1}{9} A^3$ .



iii) Ecuația  $AX = B$  are soluția  $X = A^{-1} \cdot B$ , adică  $X = \frac{1}{9} A^3 \cdot B$ ,

$$\text{de unde } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuația  $YA = B$  are soluția  $Y = B \cdot A^{-1}$ , adică  $Y = \frac{1}{9} B \cdot A^3$ , de unde

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## II.

$$i) \text{ Avem } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Prin urmare } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2}, & x < 0 \end{cases}.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = 1$ , deducem că  $f$  este

derivabilă în 0 și  $f'(0) = 1$ .

$$\text{Așadar } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

ii) Ecuația  $f(x) = 0$  are soluția  $x = 0$ , deci intersecțiile graficului funcției  $f$  cu axele  $Ox$  și  $Oy$  sunt date de punctul  $(0, f(0)) = (0, 0)$ .

Cum  $f(-x) = -f(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , funcția  $f$  este impară, deci graficul lui  $f$  este simetric față de origine. Se constată ușor că  $f(x) \geq 0$ , pentru  $x \geq 0$  și că  $f(x) < 0$ , pentru  $x < 0$ .

De asemenea avem

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(x+1)^3}, & x > 0 \\ -\frac{2}{(x-1)^3}, & x < 0 \end{cases}.$$

Funcția  $f$  nu este derivabilă de două ori în 0 deoarece



$$f''_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2 \text{ și}$$

$$f''_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = -2.$$

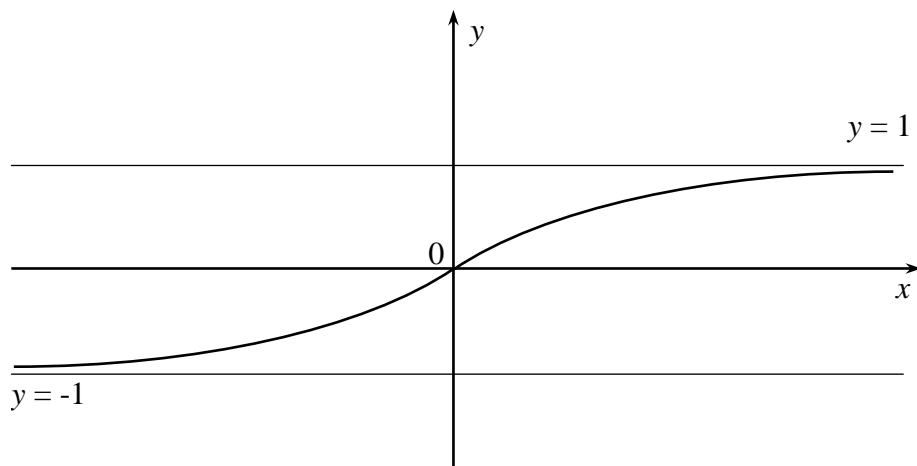
Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x} = -1$ , deducem că dreapta  $y=1$  este asimptotă la  $+\infty$  pentru graficul funcției  $f$ , iar dreapta  $y=-1$  este asimptotă la  $-\infty$  pentru graficul funcției  $f$ .

Deoarece, pentru orice  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ , deducem că nu există asimptote verticale pentru graficul funcției  $f$ .

Toate informațiile de mai sus pot fi sumarizate în tabelul următor

$x$	$-\infty$	$0$		$+\infty$
$f'(x)$	+++++			
$f''(x)$	+++++ -----			
$f(x)$	-1		0	

Prin urmare putem schița graficul funcției  $f$ .



iii) Se verifică ușor că  $x_1 < x_0$  deoarece această inegalitate este echivalentă cu  $\frac{a}{1+a} < a$ , adică cu  $0 < a^2$ .

Fie  $P(n)$  propoziția  $x_{n+1} < x_n$ .

Evident, conform celor discutate mai sus,  $P(0)$  este adevărată.

Vom arăta că  $P(n)$  implică  $P(n+1)$ .

Într-adevăr, dacă  $x_{n+1} < x_n$ , atunci, deoarece  $f$  este strict crescătoare,  $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ , i.e.  $x_{n+2} < x_{n+1}$ .

Conform metodei inducției matematice obținem că  $x_{n+1} < x_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , deci șirul  $(x_n)_n$  este descrescător. Aceeași metodă a inducției matematice ne asigură că  $x_n > 0$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Prin urmare, șirul  $(x_n)_n$  este mărginit și monoton, deci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ .

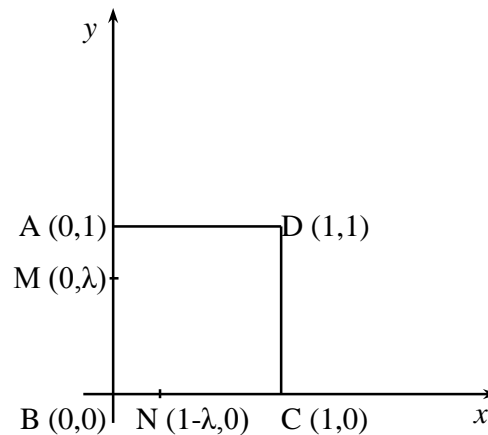
Din relația  $x_{n+1} = f(x_n)$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , având în vedere continuitatea funcției  $f$ , obținem, prin trecere la limită, că  $f(l) = l$ , i.e.

$$l = \frac{l}{1+|l|}, \text{ de unde } l = 0. \text{ Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

$$\begin{aligned}
iv) \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx + \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = \\
&= \int_{-1}^0 \frac{x-1+1}{1-x} dx + \int_0^2 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx + \int_0^2 1 dx - \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx = \\
&= (-x) \Big|_{-1}^0 - \ln(1-x) \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^2 - \ln(1+x) \Big|_0^2 = \\
&= -1 + \ln 2 + 2 - \ln 3 = 1 + \ln \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

### III.

Să alegem un sistem de axe rectangulare cu originea în  $B$ . Atunci  $A(0,1)$ ,  $B(0,0)$ ,  $C(1,0)$  și  $D(1,1)$ . Dacă  $M(0,\lambda)$ ,  $\lambda \in [0,1]$ , atunci  $N(1-\lambda,0)$ .



Dacă  $Q$  este mijlocul segmentului  $MN$  atunci  $Q\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ , deci

$$x_Q = \frac{1-\lambda}{2} \text{ și } y_Q = \frac{\lambda}{2}.$$

Prin urmare,  $x_Q + y_Q = \frac{1}{2}$  și  $x_Q \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Așadar, mulțimea punctelor care sunt mijloacele segmentelor  $MN$  este segmentul  $RT$ , unde  $R\left(0, \frac{1}{2}\right)$  și  $T\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

#### IV.

i) Valoarea căutată poate fi calculată fără efectuarea vreunei înmulțiri/împărțiri, folosind triunghiul lui Pascal, ce se bazează pe egalitatea  $C_m^i + C_m^{i+1} = C_{m+1}^{i+1}$ . Dar mai întâi vom aplica formula combinărilor complementare, pentru a ne asigura că  $k \leq n/2$ , cu scopul de a reduce numărul de adunări necesare. Apoi vom folosi un tablou  $T = (T_0, T_1, \dots, T_k)$  de dimensiune  $k+1$  inițializat cu  $(1, 1, 0, \dots, 0)$ :

```
k1 ← k; if k > n/2 then k1 ← n-k;
T0 ← 1; T1 ← 1; for i=2, k1 do Ti ← 0;
for j=2, n do
    for i=k1, 1, -1 do Ti ← Ti-1 + Ti;
write Tk1
```

**ii)** Folosind faptul că valoarea coeficienților binomiali crește și apoi descrește, valoarea maximă va fi atinsă pentru coeficientul / coeficienții "din mijloc", deci este suficient să scriem:

```
if n impar
then write (n+1)/2
else write n/2
```

**iii)** Fie  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  combinarea curentă care, conform ipotezei, admite un succesor. Determinarea succesorului se poate face în trei etape:

- determinarea celui mai mare  $i$  cu  $c_i < n-k+i$ , adică a celei mai din dreapta poziții ce poate fi majorată;
- majorarea lui  $c_i$  cu o unitate;
- înscrierea pe pozițiile  $i+1, \dots, k$  din  $c$  a valorii de pe poziția precedentă, mărită cu o unitate:

```
i ← k;
while ci = n-k+i do i ← i-1;
ci ← ci + 1;
for j=i+1, k do cj ← cj-1 + 1
for i=1, k do write ci
```

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**  
**CONCURS DE ADMITERE**  
**DOMENIUL DE LICENȚĂ MATEMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2006**

**I. Algebră**

1. Fie polinomul cu coeficienți reali  $f = X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$ .

i) Să se determine  $n$  și  $p$  astfel încât  $X^2 + 1$  să dividă pe  $f$ .

ii) Dacă  $g$  este câtul împărțirii lui  $f$  la  $X^2 + 1$ , să se calculeze

$$g(1) + \dots + g(n)$$

unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Fie mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

i) Să se arate că  $G$ , împreună cu operația de înmulțire a matricelor este grup.

ii) Este  $G$  grup comutativ? Justificare.

**II. Analiză matematică**

1.

Să se determine  $a \geq 0$ , astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) = 1.$$

2. Fie  $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$ .

i) Să se verifice că  $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ .

ii) Pentru  $A > 2$ , să se calculeze  $F(A) = \int_2^A f(x) dx$ .

iii) Să se calculeze  $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{F(A)}{A^2}$ .

### III. Geometrie

1. Fie  $ABC$  un triunghi și  $M \in (BC)$ . Bisectoarele unghiurilor  $\angle AMB$  și  $\angle AMC$  intersectează laturile  $AB$  și  $AC$  în  $P$  și, respectiv  $Q$ . Să se arate că  $PQ$  este paralelă cu  $BC$  dacă și numai dacă  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ .

2. Fie  $ABCD$  un tetraedru cu  $AC \perp BD$ . Printr-un punct  $M \in (AB)$  ducem un plan paralel cu  $AC$  și  $BD$  care intersectează  $BC$  în  $N$ ,  $CD$  în  $P$  și  $AD$  în  $Q$ .

i) Să se demonstreze că  $MNPQ$  este dreptunghi.

ii) Presupunând că  $MNPQ$  este pătrat, să se determine latura sa în funcție de lungimile laturilor lui  $ABCD$ .

### IV. Informatică

1. Se consideră numărul natural  $n > 1$  și tabloul  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , cu elemente din  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze :

i) Valoarea 0 sau 1 după cum  $p$  este sau nu o permutare a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

ii) Numărul de perechi  $(i, j)$  care verifică  $1 \leq i < j \leq n$  și  $p_i > p_j$ .

2. Se cunosc numărul natural  $n \geq 1$ , coeficienții reali ai polinomului  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ , precum și numărul real  $b$ . Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze :

i) Valorile  $P(-1)$  și  $P(1)$ .

ii) Valoarea 1 sau valoarea 0, după cum  $P$  se divide sau nu prin  $X - b$ .

Cel puțin una dintre proceduri / funcții va fi scrisă în *Pascal*, *C* sau *C++*, iar celelalte în pseudocod.

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ DOMENIUL DE LICENȚĂ MATEMATICĂ SESIUNEA IULIE 2006

I.

1.

i) Deoarece

$$X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p = (X^2 + 1)(X^2 - 2X) + (n+2)X + p,$$

deducem, conform teoremei împărțirii cu rest, că  $X^2 + 1$  divide

$$X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p,$$

dacă și numai dacă polinomul  $(n+2)X + p$ , care reprezintă restul împărțirii polinomului  $X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$  la  $X^2 + 1$ , este 0.

Prin urmare,  $X^4 - 2X^3 + X^2 + nX + p$  se divide cu  $X^2 + 1$  dacă și numai dacă

$$n = -2$$

și

$$p = 0.$$

ii) Așadar :

$$g = X^2 - 2X.$$

Având în vedere că :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

și că :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

deducem că :

$$g(1) + g(2) + \dots + g(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1),$$

i.e.

$$g(1) + g(2) + \dots + g(n) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$$



pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**2.**

i) Deoarece, pentru orice  $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$ , avem :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a_1 & b_1+b+ac_1 \\ 0 & 1 & c+c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deducem că înmulțirea matricelor este o lege de compoziție pe  $G$ .

Este binecunoscut faptul că înmulțirea matricelor cu elemente numere întregi este asociativă.

Elementul neutru pentru înmulțirea matricelor din  $G$  este :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Se poate verifica imediat că inversa matricei  $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ , în

raport cu înmulțirea matricelor din  $G$ , este matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

ii) Deoarece :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că afirmația : pentru orice  $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$ , avem

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este falsă, deci  $G$  nu este grup comutativ.

## II.

1. Deoarece :

$$\sqrt{n} + (\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) = \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n+a} + \sqrt{n}} = \frac{a}{1 + \sqrt{1 + \frac{a}{n}}}$$

și :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \sqrt{1 + \frac{a}{n}}} = \frac{a}{2},$$

deducem că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) = \frac{a}{2}.$$

Prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n}) = 1$$

dacă și numai dacă  $a = 2$ .

## 2.

i) Un calcul simplu ne asigură că relația  $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$ ,

pentru orice  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ , este validă.

ii) Avem

$$F(A) = \int_2^A f(x) dx = \int_2^A \left( x + 2 + \frac{4}{x-1} \right) dx = \frac{A^2}{2} + 2A - 6 + 4 \ln(A-1)$$

pentru orice  $A > 2$ .

iii) Deoarece, pentru orice  $A > 2$ ,

$$\frac{F(A)}{A^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{A} - \frac{6}{A^2} + 4 \frac{\ln(A-1)}{A^2}$$

și

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{A} - \frac{6}{A^2} \right) = \lim_{A \rightarrow \infty} 4 \frac{\ln(A-1)}{A^2} = 0,$$

rezultă că

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{F(A)}{A^2} = \frac{1}{2}.$$

### III.

1. În conformitate cu teorema bisectoarei, avem relațiile

$$\frac{BM}{AM} = \frac{BP}{AP} \quad (*)$$

și

$$\frac{CM}{AM} = \frac{CQ}{AQ}. \quad (**)$$

Prin urmare, folosind reciproca teoremei lui *Thales*, avem :

$$PQ \parallel BC \Leftrightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{CQ}{AQ} \Leftrightarrow BM = MC,$$

unde pentru ultima echivalență am folosit relațiile (\*) și (\*\*).

Așadar,  $PQ$  este paralelă cu  $BC$  dacă și numai dacă  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ .

#### 2.

i) Fie  $\alpha$  planul  $MNPQ$ .

Deoarece  $AC \parallel \alpha$ , deducem că :

$$MN \parallel QP \parallel AC,$$

și deoarece  $BD \parallel \alpha$ , obținem că :

$$MQ \parallel NP \parallel BD.$$

Prin urmare  $MNPQ$  este paralelogram.

Cum  $AC \perp BD$ , având în vedere cele anterioare, tragem concluzia că  $MNPQ$  este dreptunghi.

ii) Fie  $l$  latura pătratului  $MNPQ$ .

Atunci, conform teoremei lui *Thales*, deoarece  $MQ \parallel BD$ , avem :

$$\frac{MQ}{BD} = \frac{AQ}{AD},$$

i.e.

$$\frac{l}{BD} = \frac{AQ}{AD}.$$

Un argument similar ne conduce la :

$$\frac{QP}{AC} = \frac{QD}{AD},$$

adică la :

$$\frac{l}{AC} = \frac{QD}{AD}.$$

Prin adunarea relațiilor (\*) și (\*\*), obținem :

$$l \left( \frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} \right) = \frac{AQ}{AD} + \frac{QD}{AD} = 1,$$

de unde

$$l = \frac{AC \cdot BD}{AC + BD}.$$

#### IV.

##### 1.

i) Au fost acceptate atât soluțiile care folosesc un tablou suplimentar, cât și cele care nu folosesc un tablou suplimentar.

Dacă nu folosim un tablou suplimentar, putem mai întâi ordona crescător elementele lui  $p$ , iar apoi verificăm că ele sunt în ordine  $1, 2, \dots, n$ . Timpul de executare este de ordinul  $O(n \log n)$ .

Un timp mai bun, și anume liniar, se obține dacă folosim un tablou suplimentar  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ale cărui elemente sunt inițializate cu 0. Apoi pentru fiecare  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , punem  $x_{p_i} = 1$ . Rămâne de verificat dacă toate elementele lui  $x$  au acum valoarea 1.

ii) Numărul de perechi  $np$  cu proprietatea din enunț se obține foarte simplu astfel :

$np \leftarrow 0$

for  $i=1, n-1$

for  $j=i+1, n$

if  $p_i > p_j$  then  $np \leftarrow np + 1$

##### 2.

i) Valorile  $\alpha = P(-1)$  și  $\beta = P(1)$  se pot obține simplu astfel  $\alpha \leftarrow 0; \beta \leftarrow 0; s \leftarrow 1;$

for  $i = 0, n$

$\alpha \leftarrow \alpha + s \cdot a_i; \beta \leftarrow \beta + a_i; s \leftarrow -s.$

ii) Ținem cont de faptul că  $P$  se divide prin  $X - b$  dacă și numai dacă  $P(b) = 0$ . Pentru calculul lui  $pb = P(b)$  folosim schema lui Horner :

```

 $pb \leftarrow a_n$ 
for  $i = n-1, 0, -1$ 
     $pb \leftarrow pb \cdot b + a_i$ 
if  $pb = 0$  then tipărește 1
    else tipărește 0

```

**UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**  
**FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**  
**CONCURS DE ADMITERE**  
**DOMENIUL DE LICENȚĂ INFORMATICĂ**  
**SESIUNEA IULIE 2006**

**I. Algebră**

1. Fie polinomul  $f = X^3 + mX^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ .

i) Să se determine  $m$  știind că rădăcinile sale  $x_1, x_2, x_3$  satisfac relațiile :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1 \text{ și } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 4m - 1.$$

ii) Pentru  $m$  determinat la punctul i), să se afle rădăcinile polinomului.

2. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

i) Să se calculeze  $A^n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

ii) Să se arate că  $A$  este inversabilă și să se calculeze inversa sa.

iii) Să se arate că mulțimea  $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ , împreună cu operația de înmulțire a matricelor este un grup izomorf cu  $(\mathbb{Z}_4, +)$ .

**II. Analiză matematică**

1.

Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$ .

2. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$ .

### III. Geometrie

1. Într-un plan raportat la un sistem de coordonate carteziane, se consideră punctele  $A(1,0)$  și  $B(2,1)$ . Să se determine punctele  $C$  din plan cu proprietatea că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

2. Să se demonstreze că dintre toate triunghiurile incluse în mulțimea formată dintr-un cerc dat, împreună cu interiorul său, cele de arie maximă sunt cele înscrise și echilaterale.

### IV. Informatică

1. Se cunosc numărul natural  $n \geq 1$  și două tablouri  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  cu elemente cifre în baza 10. Spunem că  $X \leq Y$  dacă  $x_i \leq y_i$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze :

i) Valoarea 1 sau 0, după cum  $X \leq Y$  sau nu.

ii) Toate tablourile  $Z$  cu elemente cifre în baza 10 astfel încât  $X \leq Z \leq Y$ , precum și numărul lor, în ipoteza că  $X \leq Y$ .

2. Șirul lui *Fibonacci* este definit prin  $x_0 = x_1 = 1$  și  $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$ , pentru orice  $k \geq 2$ . Se consideră date un număr natural  $p$  și numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Să se scrie proceduri/funcții care să afișeze :

i) 1 sau 0, după cum  $p$  este sau nu termen al șirului lui *Fibonacci*.

ii) 1 sau 0, după cum  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt, într-o ordine convenabilă, termeni consecutivi ai șirului lui *Fibonacci*.

La fiecare problemă, cel puțin una dintre proceduri / funcții va fi scrisă în *Pascal*, *C* sau *C++*, iar celelalte în pseudocod.

## SOLUȚII

### FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ DOMENIUL DE LICENȚĂ INFORMATICĂ SESIUNEA IULIE 2006

I.

1.

i) Conform relațiilor lui Viète avem :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -m \text{ și } x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1.$$

Prin urmare :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = m^2 - 2.$$

Așadar, cu notația  $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ , avem :

$$S_1 = -m$$

și

$$S_2 = m^2 - 2.$$

Deoarece  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului

$f = X^3 + mX^2 + X + 1$ , putem scrie :

$$x_1^3 + mx_1^2 + x_1 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x_2^3 + mx_2^2 + x_2 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x_3^3 + mx_3^2 + x_3 + 1 = 0, \quad (3)$$

de unde, prin adunarea acestor relații, obținem :

$$S_3 + mS_2 + S_1 + 3 = 0 \quad (*)$$

Înmulțind (1) cu  $x_1$ , (2) cu  $x_2$  și (3) cu  $x_3$ , avem

$$x_1^4 + mx_1^3 + x_1^2 + x_1 = 0$$

$$x_2^4 + mx_2^3 + x_2^2 + x_2 = 0$$

$$x_3^4 + mx_3^3 + x_3^2 + x_3 = 0,$$

de unde, prin adunarea acestor relații, obținem :

$$S_4 + mS_3 + S_2 + S_1 = 0. \quad (**)$$

Pe de o parte, așa cum am văzut mai sus :

$$S_1 = -m$$



și

$$S_2 = m^2 - 2.$$

Pe de altă parte, conform ipotezei :

$$S_3 = -1$$

și

$$S_4 = 4m - 1.$$

Prin urmare, relațiile (\*) și (\*\*) devin :

$$(m-1)^2(m+2) = 0$$

și respectiv

$$(m-1)(m+3) = 0,$$

de unde

$$m = 1.$$

ii) Pentru  $m = 1$  polinomul considerat este :

$$f = X^3 + X^2 + X + 1,$$

i.e.

$$f = (X^2 + 1)(X + 1),$$

deci rădăcinile sale sunt  $-1, i$  și  $-i$ .

2.

i) Un calcul simplu arată că :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și

$$A^4 = I_4.$$

Atunci pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , avem :

$$A^{4n} = I_4,$$

$$A^{4n+1} = A,$$

$$A^{4n+2} = A^2$$

și :

$$A^{4n+3} = A^3.$$

ii) Relația  $A^4 = I_4$ , scrisă sub forma  $A \cdot A^3 = A^3 \cdot A = I_4$ , ne asigură că  $A$  este inversabilă și că  $A^{-1} = A^3$ .

iii) Se constată cu ușurință că operația de înmulțire a matricelor este o lege de compoziție pe  $G$ .

Este binecunoscut faptul că înmulțirea matricelor este asociativă.

Se verifică imediat că  $A^4 = I_4 \in G$  este element neutru pentru înmulțirea matricelor din  $G$ .

Să observăm că orice element din  $G$  are invers față de înmulțirea matricelor, anume  $A$  are drept invers pe  $A^3$ ,  $A^2$  are drept invers pe  $A$ ,  $A^3$  are drept invers pe  $A$  și  $A^4 = I_4$  are drept invers pe  $A^4 = I_4$ .

Așadar  $G$  împreună cu operația de înmulțire a matricelor este un grup.

Se verifică imediat că funcția  $f: G \rightarrow \mathbb{Z}_4$ , dată de  $f(A^4) = \hat{0}$ ,  $f(A) = \hat{1}$ ,  $f(A^2) = \hat{2}$  și  $f(A^3) = \hat{3}$ , este un izomorfism între grupurile  $(G, \cdot)$  și  $(\mathbb{Z}_4, +)$ .

## II.

$$1. \text{ Deoarece } x(\pi - 2\arctg x) = \frac{\pi - 2\arctg x}{\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2\arctg x) = 0, \quad \frac{(\pi - 2\arctg x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{-2 \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \frac{x^2}{1+x^2}$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{x^2}{1+x^2} = 2,$$

având în vedere regula lui *l'Hôpital*, deducem că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \arctg x) = 2.$$

**2.** Fie  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4}$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , pentru simplitate,

vom folosi notația  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ .

Atunci :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

și :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , avem :

$$I_n = \int_0^1 \frac{(x^n + x^{n-2}) - (x^{n-2} + x^{n-4}) + (x^{n-4} + x^{n-6}) - \dots}{x^2+1} dx,$$

de unde :

**a)** cazul  $n = 2k$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} I_n = I_{2k} &= \int_0^1 \left( x^{2k-2} - x^{2k-4} + x^{2k-6} + \dots + (-1)^{k-1} + \frac{(-1)^k}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-5} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{1} + (-1)^k \frac{\pi}{4}; \end{aligned}$$

**b)** cazul  $n = 2k+1$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} I_n = I_{2k+1} &= \int_0^1 \left( x^{2k-1} - x^{2k-3} + x^{2k-5} + \dots + (-1)^{k-1} x + (-1)^k \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-4} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

### III.

1. Fie  $C(x, y)$ . Condiția ca triunghiul  $ABC$  să fie echilateral se exprimă prin egalitatea  $AB=BC=AC$ , adică  $2=(x-1)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$ . Ultima egalitate implică  $x+y=2$ , de unde  $2=(x-1)^2+(2-x)^2$ , adică :

$$2x^2-6x+3=0.$$

$$\text{Prin urmare, } x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \text{ de unde } y=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}.$$

Așadar, punctele căutate sunt  $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$  și  $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ .

2. Dacă  $A, B$  și  $C$  se găsesc în interiorul cercului considerat, să considerăm  $A'$  și  $C'$  intersecțiile semidreptelor  $(BA$  și  $(BC$  cu cercul. Atunci  $A_{ABC} \leq A_{A'BC'}$ .

Dacă  $B'$  este intersecția lui  $C'B$  cu cercul dat, atunci  $A_{A'BC'} \leq A_{A'B'C'}$ .

Prin urmare, dintre toate triunghiurile incluse în mulțimea formată dintr-un cerc dat, împreună cu interiorul său, cele de arie maximă se găsesc printre cele înscrise.

Să considerăm atunci un triunghi  $ABC$  înscris într-un cerc dat de centru  $O$  și rază  $R$ .

$$\text{Deoarece } A_{ABC} = \frac{AB \cdot \text{dist}(C, AB)}{2}, \text{ deducem că } A_{ABC} \leq A_{ABC''},$$

unde  $C''$  este intersecția diametrului perpendicular pe  $AB$  cu arcul mare  $\widehat{AB}$ .

Prin urmare, dintre toate triunghiurile incluse în mulțimea formată dintr-un cerc dat, împreună cu interiorul său, cele de arie maximă se găsesc printre cele înscrise care sunt isoscele și al căror vârf din care pleacă cele două laturi egale se găsește pe arcul mare de cerc determinat de celelalte două vârfuri.

Să considerăm atunci un triunghi isoscel  $ABC$  ( $AC = CB$ ) înscris într-un cerc dat centru  $O$  și rază  $R$ , pentru care  $C$  se află pe arcul mare  $\widehat{AB}$ .

Fie  $\alpha \in (0, \pi)$  măsura arcului mic  $\widehat{AB}$  și  $\beta$  măsura arcelor mici  $\widehat{AC}$  și  $\widehat{BC}$ .

Cum  $\alpha + 2\beta = 2\pi$ , deducem că  $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , deci  $\cos \beta \in (-1, 0)$ .

Să observăm că :

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{OAB} + A_{OBC} + A_{OAC} = \frac{R^2}{2}(2\sin \beta + \sin \alpha) = \\ &= \frac{R^2}{2}(2\sin \beta - \sin 2\beta) = \frac{R^2}{2}(2\sin \beta - 2\sin \beta \cos \beta) = \\ &= R^2 \sin \beta (1 - \cos \beta) = R^2 (1 - \cos \beta) \sqrt{1 - \cos^2 \beta}. \end{aligned}$$

Ca atare, cu notația  $x = \cos \beta$ , suntem conduși la studiul maximului funcției  $f : (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}(1 - x)$ .

Un calcul simplu arată că  $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ , deci  $f'(x) > 0$ , pentru  $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$  și  $f'(x) < 0$ , pentru  $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

Prin urmare  $f$  este crescătoare pe  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$  și descrescătoare pe  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ , deci maximul funcției  $f$  se atinge pentru  $x = -\frac{1}{2}$ , ceea ce corespunde lui  $\beta = \frac{2\pi}{3}$ , adică cazului în care triunghiul  $ABC$  este echilateral.

În concluzie, am arătat că dintre toate triunghiurile incluse în mulțimea formată dintr-un cerc dat, împreună cu interiorul său, cele de arie maximă sunt cele înscrise și echilaterale.

#### IV.

##### 1.

i) Să observăm mai întâi că relația de ordine  $\leq$  este doar parțial definită : de exemplu, pentru  $X = (1, 2)$  și  $Y = (2, 1)$  nu avem nici  $X \leq Y$  și nici  $Y \leq X$ .

Funcția următoare întoarce -1, 0 sau 1, după cum  $x < y$  (adică  $x \leq y$  și  $x \neq y$ ),  $x = y$  sau nu este adevărat că  $x \leq y$  :

```
function  $f(x, y)$ 
   $v \leftarrow 0; i \leftarrow 1$ 
  while  $v < 1 \ \& \ i \leq n$ 
    if  $x_i = y_i$ 
      then  $i \leftarrow i + 1$ 
    else if  $x_i < y_i$ 
      then  $v \leftarrow -1; i \leftarrow i + 1$ 
    else  $v \leftarrow 1$ 
  return  $v$ 
end
```

Este acum suficient să executăm instrucțiunea :

```
if  $f(x, y) < 1$  then tipărește 1
      else tipărește 0
```

ii) Următoarea funcție înlocuiește pe  $z$  cu succesorul său, în situația în care  $z < y$  :

```
function  $succ(x, y, z)$ 
   $i \leftarrow n$ 
  while  $z_i = y_i$ 
     $z_i \leftarrow x_i; i \leftarrow i - 1$ 
   $z_i \leftarrow z_i + 1$ ; return  $z$ 
end
```

Folosind această funcție, putem proceda astfel :

```
 $nr \leftarrow 0; z \leftarrow x$ 
if  $f(z, y) < 1$  then tipărește  $x$ ;  $nr \leftarrow nr + 1$ 
while  $f(z, y) = -1$ 
   $z \leftarrow succ(x, y, z)$ ; tipărește  $z$ ;  $nr \leftarrow nr + 1$ 
```

tipărește  $nr$

**2.**

i) În variabilele  $x$  și  $y$  vom memora doi termeni succesivi ai șirului lui *Fibonacci* și le vom actualiza cât timp  $y < p$ . Rămâne de verificat dacă  $y=p$ :

**if**  $p=0$  **then** tipărește 1 ; **stop**

$x \leftarrow 0$ ;  $y \leftarrow 1$

**while**  $y < p$

$z \leftarrow y$ ;  $y \leftarrow x + y$ ;  $x \leftarrow z$

**if**  $y=p$  **then** tipărește 1

**else** tipărește 0

ii) Începem prin a ordona crescător numerele naturale  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Verificăm apoi, ca mai sus, dacă  $a_1$  este termen în șirul lui *Fibonacci*; în caz afirmativ, verificăm dacă  $a_2, \dots, a_n$  sunt termenii care îi succed lui  $a_1$  în șirul lui *Fibonacci*. Pentru simplificare, vom considera că  $a_1 > 1$ .

$x \leftarrow 0$ ;  $y \leftarrow 1$

**while**  $y < a_1$

$z \leftarrow y$ ;  $y \leftarrow x + y$ ;  $x \leftarrow z$

**if**  $y \neq a_1$  **then** tipărește 0 ; **stop**

$i \leftarrow 2$

**while**  $i \leq n$  &  $x + y = a_i$

$z \leftarrow y$ ;  $y \leftarrow x + y$ ;  $x \leftarrow z$ ;  $i \leftarrow i + 1$

**if**  $i = n + 1$  **then** tipărește 1

**else** tipărește 0

**CONCURSUL DE ADMITERE ÎN  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI**

prezentare de Horia Georgescu și Radu Miculescu

**DOMENIUL DE LICENȚĂ MATEMATICĂ  
22 iulie 2007**

**Enunțuri**

**I. 1.** Fie polinomul cu coeficienți reali

$$f = X^4 - 4X^3 + aX^2 + bX + c.$$

- a) Să se determine  $a$ ,  $b$  și  $c$  astfel încât restul împărțirii lui  $f$  la  $X - 1$  să fie  $-2$ , iar polinomul  $f$  să aibă rădăcina  $1 + i$ .
- b) Pentru valorile lui  $a$ ,  $b$  și  $c$  de la punctul a), să se afle rădăcinile polinomului.

**2.** Fie mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se arate că:

- a)  $G$  împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.  
b) Grupul aditiv  $(\mathbb{Z}, +)$  este izomorf cu grupul  $G$  de la punctul a).

**II. 1.** Fie  $a$  și  $b$  două numere reale. Se definește funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  prin:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + b, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{a+b-1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ bx + a - 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

- a) Să se arate că  $f$  este continuă dacă și numai dacă  $b = a - 1$ .  
b) Să se arate că  $f$  este derivabilă dacă și numai dacă  $a = 1$  și  $b = 0$ .  
2. Se consideră funcțiile  $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $u(x) = x^2 - x + 1$  și  $v : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $v(x) = 1$ .

Se definește funcția  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin

$$f(x) = \max\{u(x), v(x)\}.$$

- a) Să se arate că  $f$  este continuă.

- b) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**III. 1.** Două cercuri  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r_2)$  sunt tangente exterior. Să se determine lungimea tangentelor exterioare.

2. Fie  $ABCD$  un pătrat circumscris unui cerc de rază 1. Să se arate că, pentru orice punct  $P$ , situat pe cerc, are loc relația

$$PA^2 \cdot PC^2 + PB^2 \cdot PD^2 = 10.$$

**IV. 1.** Fiecărui număr natural strict pozitiv  $k$  îi asociem valoarea  $\text{impar}(k)$  ce reprezintă cel mai mare divizor impar al lui  $k$ . Pentru numerele naturale strict pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  date, se cere să se tipărească:

- a) valoarea  $\text{impar}(a_1)$ .  
b) valoarea 1, respectiv 0, după cum numerele  $\text{impar}(a_1), \text{impar}(a_2), \dots, \text{impar}(a_n)$  sunt sau nu în ordine crescătoare.  
c) numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  în ordinea crescătoare a valorilor atașate lor prin funcția  $\text{impar}$ .

2. Se dau  $n$  puncte în plan prin coordonatele lor reale  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se cere să se tipărească:

- a) raza minimă a discului centrat în  $(x_1, y_1)$  care conține toate celelalte  $n - 1$  puncte.



b) coordonatele centrului și raza discului de rază minimă centrat într-unul din puncte și care le conține pe toate celelalte.

Pentru cel puțin unul dintre subpuncte se va scrie codul în Pascal, C sau C++, pentru celelalte fiind suficient ca soluția să fie redactată în pseudocod.

### Soluții

I. 1. a) Deoarece restul împărțirii lui  $f$  la  $X - 1$  este  $-2$ , conform teoremei lui Bezout, avem  $f(1) = -2$ , deci:

$$a + b + c = 1. \quad (1)$$

Deoarece polinomul considerat are coeficienții reali și are rădăcina  $1 + i$ , el admite și rădăcina  $1 - i$ . Prin urmare se divide cu  $(X - (1 + i))(X - (1 - i)) = X^2 - 2X + 2$ , deci restul împărțirii lui  $f$  la  $X^2 - 2X + 2$ , adică  $(2a + b - 8)X - 2a + c + 12$ , trebuie să fie 0. Așadar:

$$2a + b - 8 = 0 \quad (2)$$

$$-2a + c + 12 = 0. \quad (3)$$

Sistemul dat de relațiile (1), (2) și (3), ne furnizează soluția  $a = 5$ ,  $b = -2$  și  $c = -2$ .

b) Deoarece câtul împărțirii lui  $f$  la  $X^2 - 2X + 2$  este  $X^2 - 2X + a - 6$ , adică  $X^2 - 2X - 1$ , deducem că rădăcinile polinomului  $f$  sunt  $1 + i$ ,  $1 - i$ ,  $1 + \sqrt{2}$  și  $1 - \sqrt{2}$ .

2. a) Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , considerăm:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să observăm că  $M_n \cdot M_m = M_{n+m}$ , pentru orice  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Prin urmare, înmulțirea matricelor din  $G$  este lege de compoziție internă.

Este binecunoscut faptul că înmulțirea matricelor este asociativă.

Deoarece

$$M_n \cdot M_0 = M_0 \cdot M_n = M_n,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , deducem că  $M_0$  este element neutru pentru înmulțirea matricelor din  $G$ .

Având în vedere că

$$M_n \cdot M_{-n} = M_{-n} \cdot M_n = M_0,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ , deducem că orice element din  $G$  are invers relativ la înmulțirea matricelor din  $G$ .

Întrucât

$$M_n \cdot M_m = M_m \cdot M_n = M_{n+m},$$

pentru orice  $n, m \in \mathbb{Z}$ , deducem că înmulțirea matricelor din  $G$  este comutativă.

Așadar  $G$  împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.

b) Fie  $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$  dată de:

$$f(n) = M_n,$$

pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ .

Cum, pentru orice  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = f(m)$  implică  $M_n = M_m$ , de unde  $m = n$ , deducem că  $f$  este injectivă.

Întrucât  $f(\mathbb{Z}) = G$ , deducem că  $f$  este surjectivă.

Așadar  $f$  este bijectivă. (\*)

Pentru că:

$$M_n \cdot M_m = M_{n+m},$$

adică:

$$f(n) \cdot f(m) = f(n + m),$$

pentru orice  $n, m \in \mathbb{Z}$ , tragem concluzia că  $f$  este morfism de grupuri. (\*\*)

Prin urmare, din (\*) și (\*\*), deducem că  $f$  este izomorfism de grupuri, deci că grupul aditiv  $(\mathbb{Z}, +)$  este izomorf cu grupul  $G$  de la punctul a).

II. 1. a) Este clar că funcția  $f$  este continuă în orice  $x \neq 0$ .

Studiem continuitatea în 0.

Pentru  $b = a - 1$ , vom arăta că  $f$  este continuă în 0.

În acest caz avem:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + a - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ a - 1, & \text{dacă } x = 0 \\ (a - 1)x + a - 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = a - 1 = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0),$$

deci  $f$  este continuă în 0.

Dacă  $f$  este continuă în 0, arătăm că  $b = a - 1$ .

Într-adevăr, în acest caz:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = b, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = a - 1$$

și

$$f(0) = \frac{a + b - 1}{2},$$

deci trebuie să avem:

$$b = a - 1.$$

b) Este clar că funcția  $f$  este derivabilă în orice  $x \neq 0$ .

Studiem derivabilitatea în 0.

Dacă  $a = 1$  și  $b = 0$ , arătăm că  $f$  este derivabilă.

În acest caz:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange, deoarece există:

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} 3x^2 = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 0 = 0,$$

deducem că:

$$f'_s(0) = f'_d(0) = 0,$$

deci  $f$  este derivabilă în 0 și:

$$f'(0) = 0.$$

Reciproc, dacă  $f$  este derivabilă în 0, arătăm că  $a = 1$  și  $b = 0$ .

Într-adevăr, în acest caz, funcția  $f$  fiind continuă în 0, avem  $b = a - 1$ ,

deci

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + a - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ a - 1, & \text{dacă } x = 0 \\ (a - 1)x + a - 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Întrucât există:

$$\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \nearrow 0} 3ax^2 = 0$$

și

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} (a - 1) = a - 1,$$

conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange, avem:

$$f'_s(0) = 0$$

și

$$f'_d(0) = a - 1,$$

deci

$$a - 1 = 0.$$

Așadar  $a = 1$  și  $b = 0$ .

2. Un calcul simplu arată că:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in [-1, 0] \\ 1, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

a) Este clar că funcția  $f$  este continuă în orice  $x \neq 0$ .

Deoarece  $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ , deducem că  $f$  este continuă

și în 0.

b) Avem:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - x + 1) dx + \int_0^1 1 dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^1 = \\ &= \left( 0 - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) \right) + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

III. 1. Fie  $T_1 T_2$ , unde  $T_1 \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$  și  $T_2 \in \mathcal{C}(O_2, r_2)$ , o tangentă exterioară.

Putem presupune, fără a știrbi generalitatea, că  $r_1 \leq r_2$ .

Fie  $M$  pe segmentul  $O_2 T_2$ , astfel încât  $O_1 M \perp O_2 T_2$ .

Atunci, deoarece  $O_2 M = r_2 - r_1$ ,  $O_1 O_2 = r_1 + r_2$ , conform teoremei lui Pitagora, aplicată în triunghiul dreptunghic  $O_1 M O_2$ , deducem că:

$$O_1 M = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Dar, pentru că  $T_1 T_2 = O_1 M$ , deducem că lungimea tangentelor exterioare este  $2\sqrt{r_1 r_2}$ .

2. Vom considera un sistem rectangular de axe  $xOy$  astfel încât  $O$  este centrul cercului,  $Ox$  este paralelă cu una dintre laturile pătratului, iar  $Oy$  este paralelă cu una dintre laturile pătratului care este perpendiculară pe latura pătratului considerată anterior.

Atunci putem considera că  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(1, -1)$  și  $D(-1, -1)$ .

Dacă  $P(x, y)$  este un punct arbitrar pe cerc, atunci:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ PA^2 &= (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 1 + 2(x - y) = 3 + 2(x - y) \\ PB^2 &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3 - 2(x + y), \\ PC^2 &= (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3 - 2(x - y) \end{aligned}$$

și

$$PD^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 3 + 2(x + y),$$

deci

$$PA^2 \cdot PC^2 + PB^2 \cdot PD^2 =$$

$$\begin{aligned} &= [3 + 2(x - y)] \cdot [3 - 2(x - y)] + [3 - 2(x + y)] \cdot [3 + 2(x + y)] = \\ &= [9 - 4(x - y)^2] + [9 - 4(x + y)^2] = [9 - 4(x^2 + y^2) + 8xy] + [9 - 4(x^2 + y^2) - 8xy] = \\ &= 5 + 8xy + 5 - 8xy = 10. \end{aligned}$$

#### IV.1.

a) Funcția *impar* are forma:

```
function impar(k)
    while (k%2 = 0) k ← k/2
    return k
```

b) Copiem într-un tablou *b* valorile atașate elementelor  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  prin funcția *impar* și verificăm dacă elementele lui *b* sunt în ordine crescătoare:

```
for i = 1, n
    b_i ← impar(a_i)
v ← 1; poz ← 1;
while v = 1 and poz < n
    if b_poz > b_{poz+1} then v = 0
    else poz ++
write (v)
```

c) Ordonăm crescător elementele lui *b* folosind un algoritm bazat pe interschimbări, la fiecare interschimbare a două elemente din *b* efectuând și interschimbarea elementelor corespunzătoare din *a*. Elementele lui *a* apar acum în ordinea dorită.

2. Vom folosi următoarea funcție ce determină distanța a două puncte dintre cele date, identificate prin numărul lor de ordine:

```
function dist(i, j)
    a ← x_i - x_j; b ← y_i - y_j
    return sqrt(a * a + b * b)
```

a) Raza căutată este  $r = \max\{dist(1, i) | i = 2, \dots, n\}$  :

```
r ← dist(1, 2)
for i = 3, n
    if dist(1, i) > r then r ← dist(1, i)
```

b) Raza căutată este  $r_{min} = \min\{r_i | i = 1, \dots, n\}$ , unde

$$r_i = \max\{dist(i, j) | j = 1, \dots, n, j \neq i\},$$

iar *ii* este indicele pentru care este realizat minimul:

```
ii ← 1; r_min ← r // valoarea r de la punctul a)
for i = 2, n
    r ← dist(i - 1, i) + 1
    for j = 1, n
        if j ≠ i and dist(i, j) > r
            then r ← dist(i, j)
    if r_min > r then r_min ← r
```

#### DOMENIUL DE LICENȚĂ INFORMATICĂ

23 iulie 2007

#### Enunțuri

I. 1. Fie ecuația  $x^3 - x^2 + 5x + 2 = 0$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2$  și  $x_3$ .

Să se calculeze:

a)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  și  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ .      b) determinantul  $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ .

2. Fie mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Să se arate că:

a) *G* împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.

b) dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $b \neq -1$  și  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , atunci  $A \in G$  dacă și

$$\text{numai dacă există } r \in \mathbb{Q} \text{ astfel încât } a = \frac{2r}{1+r^2} \text{ și } b = \frac{1-r^2}{1+r^2}.$$

c) Grupul *G* are o infinitate de elemente.

II. 1. Pentru  $a > 0$ , considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  descris astfel:  $x_1 = a$  și

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n,$$

pentru orice  $n \geq 1$ .

a) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător.

b) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

c) Să se arate că, pentru orice  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{1+x_k} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$ .

d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}$ .

2. a) Să se arate că, pentru orice  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , avem:

$$1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}.$$

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^n dx$ .

III. 1. Fie *ABC* un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Să se arate că, pentru orice  $M \in \widehat{BC}$ , avem:

$$MA = MB + MC.$$

2. Fie  $ABCD$  un pătrat de latură 2. Să se determine punctele  $P$  din interiorul sau de pe laturile pătratului, cu proprietatea că suma:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

este maximă și, respectiv, minimă.

IV. 1. Se consideră segmentele închise  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , cu extremitățile numere întregi.

a) Să se tipărească valoarea 1, respectiv 0, după cum intersecția  $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$  este sau nu vidă.

b) Să se tipărească valoarea 1, respectiv 0, după cum intersecția celor  $n$  segmente este sau nu vidă.

c) În ipoteza că intersecția segmentelor este nevidă, să se tipărească extremitățile segmentului ce constituie reuniunea celor  $n$  segmente.

2. Un arbore cu vârfurile etichetate cu  $1, 2, \dots, n$  este bine determinat de tabloul *tata* cu  $n$  elemente, unde *tata* ( $i$ ) reprezintă vârful care are printre descendenți vârful  $i$  sau este 0 dacă  $i$  este rădăcina arborelui. Se cer următoarele:

a) Fiind dat un tablou *tata* asociat unui arbore, să se determine frunzele arborelui; pentru fiecare frunză, să se determine drumul de la ea la rădăcină și drumul de la rădăcină la ea.

b) Pentru un tablou dat *tata* ale cărui elemente aparțin mulțimii  $\{0, 1, \dots, n\}$ , să se determine dacă există un arbore al cărui tablou asociat este tocmai *tata*.

Pentru cel puțin unul dintre subpuncte se va scrie codul în Pascal, C sau C++, pentru celelalte fiind suficient ca soluția să fie redactată în pseudocod.

## Soluții

I. 1. a) Conform relațiilor lui Viète, avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5 \quad \text{și} \quad x_1x_2x_3 = -2,$$

de unde:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1 - 2 \cdot 5 = -9.$$

Cum:

$$x_1^3 = x_1^2 - 5x_1 - 2, \quad x_2^3 = x_2^2 - 5x_2 - 2 \quad \text{și} \quad x_3^3 = x_3^2 - 5x_3 - 2,$$

deducem că:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5(x_1 + x_2 + x_3) - 6 = -9 - 5 - 6 = -20.$$

Pentru că:

$$x_1^4 = x_1^3 - 5x_1^2 - 2x_1, \quad x_2^4 = x_2^3 - 5x_2^2 - 2x_2 \quad \text{și} \quad x_3^4 = x_3^3 - 5x_3^2 - 2x_3,$$

deducem că:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) = -20 - 5 \cdot (-9) - 2 \cdot 1 = 22 + 45 = 23.$$

b) Avem:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) = (-2) \cdot 1 - 23 = -25.$$

2. a) Pentru  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a_1^2 + b_1^2 = 1$  și  $a_2^2 + b_2^2 = 1$ , fie

$$M_{a_1, b_1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad M_{a_2, b_2} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} M_{a_1, b_1} \cdot M_{a_2, b_2} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} = M_{a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1}, \end{aligned}$$

de unde, deoarece  $a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$  și

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) = 1,$$

concluzionăm că înmulțirea matricelor din  $G$  este lege de compoziție internă.

Este binecunoscut faptul că înmulțirea matricelor este asociativă.

Deoarece  $M_{a, b} \cdot M_{1, 0} = M_{1, 0} \cdot M_{a, b} = M_{a, b}$ , pentru orice  $a, b \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a^2 + b^2 = 1$ , deducem că  $M_{1, 0} \in G$  este element neutru pentru înmulțirea matricelor din  $G$ .

Deoarece pentru orice  $a, b \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a^2 + b^2 = 1$ , avem:

$$M_{a, b} \cdot M_{a, -b} = M_{a, -b} \cdot M_{a, b} = M_{1, 0},$$

deducem că orice element din  $G$  are un invers relativ la înmulțirea matricelor din  $G$ .

Întrucât, pentru  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a_1^2 + b_1^2 = 1$  și  $a_2^2 + b_2^2 = 1$ , avem:

$$M_{a_1, b_1} \cdot M_{a_2, b_2} = M_{a_2, b_2} \cdot M_{a_1, b_1} = M_{a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1},$$

deducem că înmulțirea matricelor din  $G$  este comutativă.

Așadar  $G$  împreună cu înmulțirea matricelor este grup comutativ.

b) Este clar că dacă există  $r \in \mathbb{Q}$  astfel încât  $a = \frac{2r}{1+r^2}$  și  $b = \frac{1-r^2}{1+r^2}$ , atunci:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G,$$

deoarece  $a, b \in \mathbb{Q}$  și

$$a^2 + b^2 = \frac{4r^2 + (1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} = \frac{r^4 + 2r^2 + 1}{(1 + r^2)^2} = 1.$$

Reciproc, dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $b \neq -1$ , au proprietatea că  $a^2 + b^2 = 1$ , atunci există  $\theta \in [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]$ , astfel încât  $a = \sin \theta$  și  $b = \cos \theta$ .

Prin urmare:

$$r = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \in \mathbb{Q}.$$

Formulele binecunoscute  $\sin \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}$  și  $\cos \theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}$  ne

asigură că  $a = \frac{2r}{1 + r^2}$  și  $b = \frac{1 - r^2}{1 + r^2}$ , unde  $r \in \mathbb{Q}$ .

c) Deoarece pentru  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ,  $r_1, r_2 > 1$ , funcționează implicația:

$$\frac{2r_1}{1 + r_1^2} = \frac{2r_2}{1 + r_2^2} \Rightarrow r_1 = r_2,$$

deducem, pe baza punctului b), că grupul  $G$  are o infinitate de elemente.

II. 1. a) Deoarece  $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0$ , pentru orice  $n \geq 1$ , deducem că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este crescător.

b) Prin urmare, există  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dacă presupunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ , atunci, prin trecere la limită în relația de recurență, obținem  $L = L^2 + L$ , de unde  $L = 0$ , ceea ce contrazice faptul că  $x_n \geq x_1 = a > 0$ , pentru orice  $n \geq 1$ .

Așadar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

c) Avem:

$$\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k x_{k+1}} = \frac{x_k^2}{x_k x_{k+1}} = \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_k}{x_k(x_k + 1)} = \frac{1}{x_k + 1},$$

pentru orice  $k \geq 1$ .

d) Deoarece, pentru orice  $n \geq 1$ , avem:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + x_k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}},$$

folosind b), deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + x_k} = \frac{1}{a}$ .

2. a) Deoarece, pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  și  $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$ , deducem că  $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ , pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Alternativ, considerăm funcția  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , dată de  $f(x) = \sin x + \cos x$ , pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Deoarece  $f'(x) = \cos x - \sin x$ , pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , deducem că  $f'(x) \geq 0$ , pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  și  $f'(x) \leq 0$ , pentru orice  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Prin urmare  $f$  este crescătoare pe  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  și descrescătoare pe  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ , deci:

$$\min \left\{ f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , deci  $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ , pentru orice  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b) Folosind a), obținem:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^n dx \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} (\sqrt{2})^n$$

adică:

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^n dx \leq \frac{\pi}{2^{\frac{n}{2}+1}},$$

pentru orice  $n \geq 1$ .

Inegalitatea de mai sus, împreună cu faptul că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^{\frac{n}{2}+1}} = 0,$$

ne asigură, folosind lema cleștelui, că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^n dx = 0.$$

III. 1. Conform teoremei lui Ptolemeu, avem:

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB,$$

de unde, deoarece  $AC = BC = AB$ , deducem că  $MA = MB + MC$ .

2. Vom considera un sistem rectangular de axe  $xOy$  astfel încât  $O$  este centrul pătratului,  $Ox$  este paralelă cu una dintre laturile pătratului, iar  $Oy$  este paralelă cu una dintre laturile pătratului care este perpendiculară pe latura pătratului considerată anterior.

Atunci putem considera că  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(1, -1)$  și  $D(-1, -1)$ .

Dacă  $P(x, y)$  este un punct din interiorul sau de pe laturile pătratului,

atunci:

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1,$$

$$PA^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2, \quad PB^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2, \quad PC^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

$$\text{și } PD^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2, \text{ deci:}$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4(x^2 + y^2 + 2).$$

Prin urmare:

$$8 \leq PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 \leq 16,$$

și valoarea minimă, anume 8, se atinge pentru  $x = y = 0$ , adică pentru  $P$  situat în centrul pătratului, iar valoarea maximă, anume 16, se atinge pentru  $(x = y = 1)$ ,  $(x = y = -1)$ ,  $(x = 1 \text{ și } y = -1)$  sau  $(x = -1 \text{ și } y = 1)$ , adică pentru  $P$  situat în unul dintre vârfurile pătratului.

#### IV. 1. a)

if  $b_1 < a_2$  or  $b_2 < a_1$

then write (1)

else write (0)

b) Vom pleca cu segmentul  $[st, dr] = [a_1, b_1]$ , pe care îl vom intersecta succesiv cu segmentele  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 2, \dots, n$ , extremitățile fiind în continuare memorate în  $st$  și  $dr$ . Dacă la un moment dat intersecția devine vidă, se iese din ciclu:

$st \leftarrow a_1$ ;  $dr \leftarrow b_1$

for  $i = 2, n$

if  $dr < a_i$  or  $b_i < st$

then write (1); exit

else if  $a_i > st$  then  $st \leftarrow a_i$

if  $b_i > dr$  then  $dr \leftarrow b_i$

write (0)

c) Întrucât intersecția segmentelor este nevidă, reuniunea segmentelor va fi un segment  $[st, dr]$  cu

$$st = \min\{a_i | i = 1, \dots, n\} \text{ și } dr = \max\{b_i | i = 1, \dots, n\}.$$

2. Precizăm mai întâi că o submulțime  $M \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  poate fi memorată prin intermediul „vectorului caracteristic”  $c$  cu  $n$  elemente în  $\{0, 1\}$ , construit astfel:

$$c_i = 1 \Leftrightarrow i \in M.$$

a) În ipoteza că  $tata$  este tabloul asociat unui arbore, frunzele sunt acele elemente din  $\{1, \dots, n\}$  care nu apar în  $tata$ . Pentru un astfel de element,

cele două drumuri căutate pot fi construite cu procedurile recursive *direct* și *invers*, ce realizează parcurgerea în ordine directă și în ordine inversă a unei liste înlănțuite:

procedure *direct* ( $i$ )

if  $i = 0$  then

else write ( $i$ ); *direct* ( $tata_i$ )

procedure *invers* ( $i$ )

if  $i = 0$  then

else *invers*( $tata_i$ ); write ( $i$ )

Cerințele punctului a) sunt realizate astfel:

for  $i = 1, n$

$c_i \leftarrow 1$

for  $i = 1, n$

if  $tata(i) > 0$  then  $c_{tata(i)} \leftarrow 0$

// acum frunzele sunt acei  $i$  cu  $c_i = 1$

for  $i = 1, n$

if  $c_i = 1$

then write ( $i$ ); *direct* ( $i$ ); *invers* ( $i$ )

b) Acest subpunct este singurul cu un grad de dificultate mai ridicat.

Se începe prin a verifica existența unei unice valori 0 în tabloul  $tata$ .

În această ipoteză, suntem în prezența unui graf cu  $n - 1$  muchii. Pentru a stabili că este vorba de un arbore, este suficient ca graful să fie conex, ceea ce este echivalent cu condiția ca din orice vârf să se poată ajunge în rădăcină. Mulțimea  $M$  a vârfurilor din care se poate ajunge în rădăcină poate fi construită astfel:

$M \leftarrow \{rad\}$

do

adaugat  $\leftarrow$  false

for toți  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$

if  $tata(x) \in M$

then  $M \leftarrow M \cup \{x\}$ ; *adaugat*  $\leftarrow$  true

while *adaugat*

if  $M = \{1, \dots, n\}$  then write ('Este arbore')

else write ('Nu este arbore')

Prezentăm funcția corespunzătoare, scrisă în C++:

int *verif*() {

int *nrzero* = 0, *rad* = 0,  $i, j$ ;

int  $c[n + 1]$ ;

for ( $i = 1$ ;  $i \leq n$ ;  $i++$ )

if ( $tata[i] == 0$ ) { *nrzero* ++; *rad* =  $i$ ; }

if (*nrzero* != 1) return 0;

```

for ( $i = 1$ ;  $i \leq n$ ;  $i++$ )  $c[i] = 0$ ;  $c[rad] = 1$ ;
int adaugat;
do {
    adaugat = 0;
    for ( $i = 1$ ;  $i \leq n$ ;  $i++$ )
        if (( $c[i] == 0$ ) && ( $c[tata[i]] == 1$ )){
             $c[i] = 1$ ; adaugat = 1;
        }
} while (adaugat);
int nrelem = 0;
for ( $i = 1$ ;  $i \leq n$ ;  $i++$ )
    if ( $c[i] == 1$ ) nrelem ++;
return nrelem ==  $n$ ;
}

```

Prof.univ.dr.,

Fac. de Matematică și Informatică

Universitatea București

Conf. univ.dr.,

Fac. de Matematică și Informatică

Universitatea București

**I. Algebra** 1. Se dă sistemul de ecuații lineare

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2, \end{cases}$$

unde  $m$  este un parametru real.

a) Să se arate că determinantul matricei sistemului este egal cu  $(m-1)^2(m+2)$ .

b) Să se discute și să se rezolve sistemul în funcție de valorile lui  $m$ .

2. Definim pe  $\mathbb{R}$  legea de compoziție  $*$  prin  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Fie  $G = (2, \infty)$ . Să se arate că:

a)  $x * y = (x-2)(y-2) + 2$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Deduceți că  $G$  este parte stabilă în raport cu  $*$ .

b)  $(G, *)$  este grup comutativ.

c) Funcția  $f: G \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x - 2$ , este izomorfism între grupul  $(G, *)$  și grupul multiplicativ  $((0, \infty), \cdot)$ .

**II. Analiza** 1. Fie șirul  $(x_n)_n$  de numere reale  $x_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Să se studieze:

a) monotonia șirului  $(x_n)_n$ ;

b) mărginirea șirului  $(x_n)_n$ ;

c) convergența șirului  $(x_n)_n$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .

b) Să se determine asimptotele graficului funcției  $f$ .

c) Să se traseze graficul funcției  $f$ .

**III. Geometrie** 1. Fie  $ABCD$  un paralelogram în care  $BD = AD$ . Fie  $M$  mijlocul laturii  $CD$  și  $E$  un punct pe dreapta  $BM$ , astfel încât  $BM = ME$ . Să se arate că:

a)  $BM \perp CD$ ;

b) punctele  $A$ ,  $D$  și  $E$  sunt colineare;

c)  $AD = DE$ .

2. Fie  $ABCD$  un pătrat de latură 1.

a) Dacă  $P$  este un punct interior pătratului, să se arate că suma ariilor triunghiurilor  $PAB$  și  $PCD$  este jumătate din aria pătratului.

b) Să se determine punctele  $O$  din interiorul pătratului, cu proprietatea că ariile triunghiurilor  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$  sunt proporționale cu numerele 1, 2, 4 și 3 respectiv.

**IV. Informatica** Se dă un vector de dimensiune  $n$ ,  $n \geq 1$  dat, cu valori nenegative, care se citesc de la tastatură. Să se scrie un program, într-unul din limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++), care listează secvența de lungime maximă de elemente din vectorul dat ce se obține conform algoritmului următor de vizitare a vectorului:

1. Se vizitează primul element al vectorului.

2. Următorul element vizitat se obține prin deplasarea spre dreapta cu un număr de poziții nevizitate egal cu valoarea ultimului element vizitat. Dacă în deplasarea spre dreapta se atinge capătul vectorului, deplasarea continuă cu primul element nevizitat din stânga vectorului.

Se vor explica informal detaliile de implementare a algoritmului sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucțiuni condiționale.



**Problemele propuse la concursul de admitere la  
Facultatea de Matematică și Informatică, sesiunea iulie  
2008. Indicații, comentarii, modele de redactare.**

## **1 Domeniul de licență *Matematică*. Subiectele de matematică.**

### **1.1 Algebră**

#### **1.1.1 Problema 1**

*Se dă sistemul de ecuații lineare*

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2, \end{cases}$$

*unde  $m$  este un parametru real.*

a) *Să se arate că determinantul matricei sistemului este egal cu*

$$(m - 1)^2(m + 2).$$

b) *Să se discute și să se rezolve sistemul în funcție de valorile lui  $m$ .*

*Indicații și comentarii*

a) Pentru a calcula determinantul matricei  $M$  a sistemului (care este un determinant de ordinul trei), putem folosi regula triunghiului sau regula lui Sarrus și obținem

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2.$$

Această metodă are dezavantajul că, după dezvoltarea determinantului, trebuie să mai demonstrăm identitatea

$$m^3 - 3m + 2 = (m - 1)^2(m + 2).$$

De aceea, este mai indicat să folosim în calcul proprietăți ale determinantilor. De exemplu, adunând toate coloanele la prima coloană, apare factorul  $m + 2$ . Putem folosi în continuare proprietățile determinantilor: de exemplu, scădem prima coloană din celelalte două, pentru a obține mai multe zerouri, apoi dezvoltăm determinantul obținut.

b) Discuția unui sistem de ecuații lineare înseamnă precizarea cazurilor în care sistemul este compatibil. Pentru discuția unui sistem, se folosesc *Teorema Kronecker-Capelli* (un sistem de ecuații lineare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse), sau *Teorema lui Rouché* (un sistem este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli). De aceea, discuția sistemului dat pornește de la considerarea cazurilor:  $\det(M) \neq 0$ , respectiv  $\det(M) = 0$ .

Dacă  $\det(M) \neq 0$ , sistemul este compatibil determinat. Pentru rezolvarea sistemului, se pot folosi diverse metode, ca de exemplu metoda reducerii, metoda substituției, metoda lui Gauss: orice metodă de rezolvare se ia în considerare la corectarea lucrărilor de examen. În cazul nostru, deoarece coeficienții necunoscutelor sistemului conțin și parametri, este mai indicat să folosim în rezolvare *regula lui Cramer*.

În cazul când  $m = 1$ , sistemul devine

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Am putea să studiem compatibilitatea sistemului folosind teorema lui Rouché. În cazul analizat de noi, putem ajunge mai ușor la o concluzie, deoarece o aceeași ecuație apare scrisă de trei ori. De aceea, sistemul dat este echivalent cu sistemul cu o singură ecuație și trei necunoscute, obținut prin eliminarea ecuațiilor care se repetă, adică

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil 2-nedeterminat, deoarece două dintre necunoscute pot lua valori arbitrare, iar a treia este unic determinată de aceste valori. Dacă  $m = -2$ , sistemul devine:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

Pentru a arăta că acest sistem este incompatibil, putem proceda în mai multe moduri: orice rezolvare corectă este punctată în examen. De exemplu, adunând toate ecuațiile sistemului și împărțind la 4, obținem

$$x + y + z = \frac{7}{4}.$$

Scăzând pe rând această ecuație din ecuațiile sistemului, obținem

$$x = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{4}, \quad z = \frac{9}{4},$$

numere care nu verifică, de exemplu, prima ecuație a sistemului. O altă posibilitate este folosirea teoremei lui Rouché. Metoda algoritmică (dată de teorema lui Rouché), este mai indicată într-un examen, pentru că nu se mai pierde timp suplimentar cu căutarea unor argumente ad-hoc.

### 1.1.2 Problema 2

Definim pe  $\mathbf{R}$  legea de compoziție  $*$  prin  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$  pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$ . Fie  $G = (0, \infty)$ . Să se arate că:

- a)  $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$  pentru orice  $x, y \in \mathbf{R}$ . Deduceți că  $G$  este parte stabilă în raport cu  $*$ .
- b)  $(G, *)$  este grup comutativ.
- c) Funcția  $f : G \longrightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x - 2$ , este izomorfism între grupul  $(G, *)$  și grupul multiplicativ  $((0, \infty), \cdot)$ .

*Indicații și comentarii*

a) Este mai comod să pornim demonstrarea egalității din membrul drept:

$$(x - 2)(y - 2) + 2 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 = xy - 2x - 2y + 6 = x * y.$$

Pentru a arăta că  $G$  este parte stabilă față de operația  $*$ , trebuie să argumentăm că, dacă  $x, y \in G$ , atunci  $x * y \in G$ . Altfel spus, trebuie să demonstrăm implicația:

$$x > 2, \quad y > 2 \implies x * y > 2,$$

sau, mai clar:

$$x > 2, \quad y > 2 \implies (x - 2)(y - 2) + 2 > 2.$$

b) O mulțime  $G$  este grup comutativ față de operația algebrică  $*$  dacă sunt îndeplinite câteva condiții: *lege internă* (pentru orice două elemente  $x, y \in G$ , avem  $x * y \in G$ ); *asociativitate* (pentru orice trei elemente  $x, y, z \in G$ , avem  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ); *comutativitate* (pentru orice două elemente  $x, y \in G$ , se verifică egalitatea  $x * y = y * x$ ); *element neutru* (există un element  $e \in G$  astfel ca, pentru orice element  $x \in G$  să fie verificate egalitățile:  $x * e = x$  și  $e * x = x$ ); *elemente simetrizabile* (pentru orice element  $x \in G$ , să putem determina un element  $x' \in G$ , care depinde de  $x$ , astfel ca  $x * x' = e$  și  $x' * x = e$ ).

În cazul grupurilor comutative, unele dintre condițiile de mai sus se pot simplifica. De exemplu, existența elementului neutru poate fi rescrisă astfel: există un element  $e \in G$  astfel ca, pentru orice element  $x \in G$  să fie verificată egalitatea  $x * e = x$ .

Faptul că  $*$  este lege internă pe  $G$  a fost deja verificat, la punctul anterior al problemei. Pentru a verifica celelalte condiții din definiție, este util să folosim descrierea mai simplă a operației  $*$ , sugerată la punctul a), adică  $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$ .

Atunci când determinăm elementul neutru al unui grup, este important să înțelegem că egalitatea din definiție trebuie să aibă loc pentru *orice* element din  $G$ . În cazul nostru, organizăm calculele astfel:

$$\begin{aligned} \forall x > 2 : (x - 2)(e - 2) + 2 &= x \\ \Rightarrow \forall x > 2 : (x - 2)(e - 2) - (x - 2) &= 0 \\ \Rightarrow \forall x > 2 : (x - 2)(e - 3) &= 0 \\ \Rightarrow e &= 3. \end{aligned}$$

După efectuarea acestor calcule, mai este necesar să precizăm dacă  $e \in G$ : precizarea trebuie făcută chiar și atunci când acest lucru este evident (așa cum se întâmplă și în cazul de față), deoarece unele operații algebrice nu au element neutru. De exemplu, dacă considerăm mulțimea  $G' = (4; \infty)$ , operația  $*$  rămâne lege internă pe  $G'$ , dar ea nu are element neutru (în  $G'$ ).

Pentru a demonstra că orice element din  $G$  este simetrizabil, folosim elementul neutru determinat anterior și comutativitatea operației  $*$ . Fie  $x \in G$  un element arbitrar. Căutăm  $x' \in G$  astfel ca  $x * x' = e$ ; altfel spus, trebuie să demonstrăm că ecuația

$$(x - 2)(x' - 2) + 2 = 3,$$

(în care necunoscuta este  $x'$ ), are soluție în mulțimea  $(2; \infty)$ , pentru orice valoare a parametrului  $x$  din  $(2; \infty)$ . Rezolvând ecuația, obținem

$$x' = \frac{1}{x-2} + 2;$$

soluția există în mulțimea numerelor reale, deoarece  $x \neq 2$ . Mai avem de arătat că  $x' > 2$ , ceea ce rezultă din faptul că

$$x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2} + 2 > 2.$$

c) Funcția  $f$  definește un izomorfism între grupurile  $(G, *)$  și  $((0, \infty), \cdot)$ , dacă  $f$  este funcție bijectivă și dacă

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G.$$

Prima proprietate se poate justifica arătând că  $f$  este injectivă și surjectivă, sau determinând inversa lui  $f$ : aceasta este funcția  $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow G$ , descrisă prin  $f^{-1}(t) = t + 2$ . Calculăm:

$$f(x * y) = f((x-2)(y-2) + 2) = (x-2)(y-2) = f(x) \cdot f(y).$$

Deci  $f$  este izomorfism de grupuri.

## 1.2 Analiză

### 1.2.1 Problema 1

Fie șirul  $(x_n)_n$  de numere reale  $x_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*$ . Să se studieze:

- a) monotonia șirului  $(x_n)_n$ ;
- b) mărginirea șirului  $(x_n)_n$ ;
- c) convergența șirului  $(x_n)_n$ .

*Indicații și comentarii*

a) De obicei, pentru a studia monotonia unui șir, determinăm semnul diferenței  $x_{n+1} - x_n$ : dacă această diferență evită unul dintre semnele  $+$  sau  $-$ , pentru orice indice natural  $n$ , atunci șirul dat este monoton. În cazul problemei date,

putem ajunge însă mai repede la un răspuns, determinând valorile primilor trei termeni ai șirului:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= 2,5 \\x_3 &= 1,666\dots\end{aligned}$$

Deoarece  $x_1 < x_2 > x_3$ , șirul dat nu este monoton.

b) Calculul primilor câțiva termeni ai șirului dat ne poate conduce la formularea ipotezei:  $1 \leq x_n \leq 3$ , pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$ . Chiar dacă acest rezultat este plauzibil, el trebuie totuși demonstrat. Ceea ce "deranjează" în expresia termenului general al șirului este alternanța de semn dată de factorul  $(-1)^n$ . Putem scăpa de această alternanță cu ajutorul unei duble inegalități:

$$2 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

Trebuie să mai observăm doar că

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

c) O greșeală de logică, des întâlnită, este următoarea.

*Știm că un șir monoton și mărginit este convergent. De aceea, un șir care nu e monoton și mărginit nu poate fi convergent.*

Chiar dacă șirul propus în problemă nu este monoton, nu putem afirma nimic despre convergența sa. Cu totul alta ar fi fost situația dacă am fi obținut că șirul dat nu este mărginit, deoarece orice șir convergent este mărginit. Calculul unor termeni ai șirului ne poate conduce și în acest caz la formularea ipotezei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

Pentru demonstrație, putem folosi, de exemplu, lema cleștelui:

$$\begin{aligned}2 - \frac{1}{n} &\leq x_n \leq 2 + \frac{1}{n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2, \\ \text{deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 2.\end{aligned}$$

O altă demonstrație poate fi dată cu ajutorul criteriului majorării:

$$\begin{aligned} |x_n - 2| &= |(-1)^n \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) &= 0, \\ \text{deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 2. \end{aligned}$$

Pentru a scurta demonstrația problemei, se poate începe rezolvarea cu punctul c): din faptul că șirul dat este convergent, deducem imediat (folosind teorema enunțată mai sus), că șirul este și mărginit. O astfel de argumentare este permisă într-un examen, chiar dacă astfel răspundem la întrebările problemei în altă ordine decât cea dată.

### 1.2.2 Problema 2

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

- Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției  $f$ .
- Să se determine asimptotele graficului funcției  $f$ .
- Să se traseze graficul funcției  $f$ .

*Indicații și comentarii*

a) Deoarece  $f$  este o funcție descrisă ”cu acoladă”, problema continuității și a derivabilității se pune pentru punctul 0. Este important însă să argumentăm că funcția dată este continuă și derivabilă în toate celelalte puncte reale. Pentru aceasta, putem folosi *principiul local* (dacă funcțiile  $f$  și  $g$  coincid pe o vecinătate a lui  $x_0$  și dacă  $g$  este continuă sau derivabilă în  $x_0$ , atunci și  $f$  este continuă, respectiv derivabilă în  $x_0$ ) și faptul că funcțiile elementare, definite pe intervale deschise, sunt derivabile.

Punctul 0 este punct de acumulare la stânga și la dreapta domeniului lui  $f$ . De aceea, continuitatea lui  $f$  în 0 poate fi demonstrată folosind teorema despre limitele laterale. Pentru studiul derivabilității, este indicat să folosim definiția:  $f$  este derivabilă în  $x_0$  dacă și numai dacă limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  există și este finită. Ajungem astfel la calculul derivatelor laterale (=limitele

laterale ale raportului din definiție); din faptul că acestea nu sunt egale, deducem că funcția  $f$  nu este derivabilă în 0.

Pentru funcția dată, care este continuă pe  $\mathbf{R}$  și derivabilă pe  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ , studiul derivabilității în 0 s-ar putea face și cu ajutorul *corolarului teoremei lui Lagrange*. Trebuie să fim atenți însă când aplicăm acest corolar: el nu stabilește o echivalență între derivabilitatea funcției într-un punct și existența limitei derivatei în acel punct. De aceea, dacă derivata funcției date nu are limită în 0, nu putem formula nicio concluzie despre derivabilitatea lui  $f$  în 0.

b) Funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbf{R}$ . De aceea, graficul lui  $f$  nu are asimptote verticale: în caz contrar, ar exista un punct  $x_0$  în care una din limitele laterale ar fi infinită, ceea ce nu se poate.

Este util să calculăm de la început limitele funcției spre  $+\infty$  și spre  $-\infty$ : aceste limite ne vor folosi oricum, la completarea tabelului de variație a funcției și la trasarea graficului. Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , deducem că dreapta de ecuație  $Y = 0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

Putem determina asimptota oblică spre  $-\infty$  la graficul lui  $f$  aplicând formulele de calcul (" $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ", " $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$ "), sau, mai simplu, observând că pe intervalul  $(-\infty, 0)$ , graficul lui  $f$  este semidreapta de ecuație  $Y = -X$ .

c) Trasarea graficului unei funcții numerice, al cărei domeniu de definiție este o reuniune de intervale, presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. identificarea *proprietăților geometrice* ale graficului (dacă acestea există): studiul parității, imparității sau periodicității funcției;
2. determinarea *comportării funcției la capetele domeniului de definiție* și a *asimptotelor* graficului: calculul unor valori sau limite, determinarea asimptotelor;
3. precizarea *domeniului de continuitate* și a *domeniului de derivabilitate*;
4. calculul primei derivate, studiul semnului acesteia, identificarea *intervalor de monotonie* a funcției și a *punctelor de extrem local*;
5. precizarea domeniului pe care funcția este de două ori derivabilă, calculul derivatei a doua, studiul semnului acesteia și precizarea *intervalor de convexitate* și de *concavitate* a funcției și a *punctelor de inflexiune*;



6. completarea *tabelului de variație* a funcției;

7. *trasarea graficului*.

Reprezentare grafică a unei funcții definite pe  $\mathbf{R}$  nu se poate face decât pe un interval mărginit; comportarea funcției în partea nereprezentată a graficului trebuie să fie sugerată prin desen. Pentru problema propusă, unitatea de măsură trebuie aleasă astfel ca pătratul  $[-4; 4] \times [-4; 4]$  (în care se reprezintă punctele importante ale graficului) să fie vizibil. De asemenea, în reprezentarea grafică a funcției  $f$  este important să reprezentăm pe desen semitangentele în origine, tangenta în punctul de maxim local și tangentele în punctele de inflexiune. Pentru reprezentarea grafică a funcției, unele dintre valorile acesteia trebuie approximate.

## 1.3 Geometrie

### 1.3.1 Problema 1

Fie  $ABCD$  un paralelogram în care  $BD = AD$ . Fie  $M$  mijlocul laturii  $CD$  și  $E$  un punct pe dreapta  $BM$ , astfel încât  $BM = ME$ . Să se arate că:

- a)  $BM \perp CD$ ;
- b) punctele  $A$ ,  $D$  și  $E$  sunt colineare;
- c)  $AD = DE$ .

*Indicații și comentarii*

a) Ipoteza  $ABCD = \text{paralelogram}$  conține foarte multe informații. De exemplu, știm că laturile opuse  $AB$  și  $CD$  sunt paralele, că punctul de intersecție al diagonalelor  $AC$  și  $BD$  este mijlocul acestor segmente etc. Rezolvarea presupune mai întâi extragerea informației esențiale, și anume faptul că  $AD = BC = BD$ . De aceea, triunghiul  $BDC$  este isoscel, iar mediana  $BM$  a acestui triunghi este și înălțime.

b), c) În problemele de geometrie, observarea figurii determină dezvoltarea demonstrației. O figură mai simplă, cu cât mai puține elemente, ne permite să ne concentrăm asupra relațiilor cu adevărat importante între elementele date. Atunci când adăugăm noi elemente figurii (cum ar fi, de exemplu, construirea punctului  $E$ ), este util să înțelegem legăturile nou create:  $BDEC$  este un paralelogram, deci  $DE \parallel BC$  și  $DE = BC$ .

### 1.3.2 Problema 2

Fie  $ABCD$  un pătrat de latură 1.

- a) Dacă  $P$  este un punct interior pătratului, să se arate că suma ariilor triunghiurilor  $PAB$  și  $PCD$  este jumătate din aria pătratului.
- b) Să se determine punctele  $O$  din interiorul pătratului, cu proprietatea că ariile triunghiurilor  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$  sunt proporționale cu numerele 1, 2, 4 și 3 respectiv.

*Indicații și comentarii*

a) Rezolvarea problemei poate porni de la întrebarea: *ce au în comun cele două triunghiuri?* Desigur, ele au vârful  $P$  comun, dar mai au și laturile  $AB$  și  $CD$  de lungimi egale. Mai mult, înălțimile duse din vârful  $P$  pe  $AB$  și  $CD$  sunt în prelungire, iar suma lungimilor lor este 1. Ajungem la ideea de a calcula ariile triunghiurilor folosind bazele  $AB$  și  $CD$  și înălțimile duse din vârful  $P$ .

O altă soluție poate fi dată prin metode analitice: alegem un sistem cartezian în care dreptele  $AB$  și  $AD$  sunt axele de coordonate și calculăm ariile celor două triunghiuri cu ajutorul unor determinanți de ordinul trei. Metoda are dezavantajul că trebuie explicitate două module, iar ipoteza esențială " $P$  este interior pătratului" poate să nu fie înțeleasă. Putem evita modulul, scriind coordonatele vârfurilor luate în sensul trigonometric de parcurgere a triunghiului.

Se poate da de asemenea o demonstrație care folosește dinamica figurii, bazată pe faptul că suma ariilor celor două triunghiuri nu se schimbă dacă punctul  $P$  se mișcă pe o paralelă la  $AB$ . De aceea, putem presupune că  $P \in [AD]$ , caz în care problema se rezolvă mai simplu.

b) Determinăm mai întâi mulțimea punctelor  $P$  din interiorul pătratului pentru care ariile triunghiurilor  $PAB$  și  $PCD$  sunt proporționale cu 1 și cu 4 respectiv. (Cuvântul "respectiv", prezent și în enunțul problemei, arată că ordinea este importantă!). Folosind formula pentru aria triunghiului (semiprodusul dintre bază și înălțime), deducem că raportul înălțimilor din  $P$  ale triunghiurilor  $PAB$  și  $PCD$  este 1:4. Pentru a vizualiza mulțimea punctelor  $P$  care îndeplinesc această condiție, este util să împărțim pătratul dat în 25 de mici pătrate congruente, prin construirea a 8 segmente paralele cu laturile: punctul  $P$  va descrie unul dintre segmentele nou construite, paralel cu  $AB$ .

Determinăm apoi mulțimea punctelor  $Q$  din interiorul pătratului pentru care ariile triunghiurilor  $QBC$  și  $QDA$  sunt proporționale cu 2 și cu 3 respectiv:  $Q$  va descrie unul din segmentele construite paralel cu  $AD$ .

Deducem că punctul  $O$ , care trebuie să îndeplinească ambele condiții, este punctul de intersecție al celor două segmente (v. Figura 1).

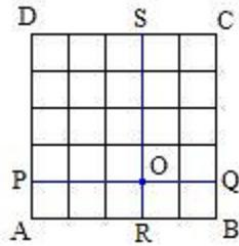


Figura 1

Metoda descrisă mai sus (cunoscută și sub denumirea de "metoda celor două locuri geometrice"), poate fi aplicată și altfel: determinăm mai întâi mulțimea punctelor  $M$  pentru care ariile triunghiurilor  $MAB$  și  $MBC$  sunt în raportul 1:2, apoi mulțimea punctelor  $N$  pentru care ariile triunghiurilor  $NCD$  și  $NDA$  sunt în raportul 4:3. Punctul  $O$  va fi punctul de intersecție al acestor mulțimi. Rezolvarea este însă mai dificilă, deoarece mulțimile obținute sunt segmente ce trec prin câte un vârf al pătratului, ca în Figura 2.

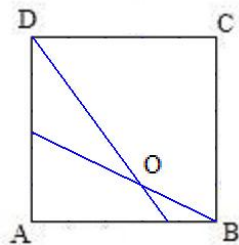


Figura 2

Este necesar să remarcăm că problema are soluție deoarece  $1 + 4 = 2 + 3$ : proprietatea demonstrată la punctul a) al problemei arată, de exemplu, că nu există puncte  $Z$  în interiorul pătratului, cu proprietatea că ariile triunghiurilor  $ZAB$ ,  $ZBC$ ,  $ZCD$ ,  $ZDA$  sunt proporționale cu numerele 1, 2, 3 și 4 respectiv.

## 2 Un model de redactare

Comunicarea scrisă la matematică are un anumit specific: una este ca un rezolvitor să explice *oral* soluția unei probleme, și cu totul altceva este transmiterea *scrisă* a rezolvării. În redactarea lucrărilor de examen, nu trebuie folosite doar simboluri matematice; pentru a putea fi ușor înțeles de către corectori, candidatul trebuie să explice pe parcurs modul de rezolvare.

Un exemplu de redactare este dat mai jos.

### 2.1 Algebră 1

a) Adunăm toate coloanele determinantului la prima:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m+2 & m & 1 \\ m+2 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}.$$

Scădem prima coloană din celelalte două, apoi dezvoltăm determinantul obținut:

$$(m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2.$$

b) Dacă  $m \in \mathbf{R} \setminus \{1; -2\}$ , atunci

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(\bar{M}),$$

( $M$ =matricea sistemului,  $\bar{M}$ =matricea extinsă a sistemului), deci sistemul este compatibil determinat, conform teoremei Kronecker-Capelli. Calculăm:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 1-m \\ m^2 & 1-m^2 & m-m^2 \end{vmatrix} = -(m-1)^2(m+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + m^2 - m - m^3 - m = (m-1)^2,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1-m^2 & m^2 \end{vmatrix} = (m^2-1)^2.$$

Aplicăm regula lui Cramer și obținem

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta_x}{\det(M)} = \frac{-(m-1)^2(m+1)}{(m-1)^2(m+2)} = -\frac{m+1}{m+2}, \\y &= \frac{\Delta_y}{\det(M)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}, \\z &= \frac{\Delta_z}{\det(M)} = \frac{(m^2-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{m+2}.\end{aligned}$$

Dacă  $m = 1$ , sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Deoarece o ecuație apare scrisă de trei ori, sistemul dat este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 1. \end{cases}$$

În acest caz, sistemul este compatibil 2-nedeterminat, mulțimea de soluții a sistemului fiind  $S = \{(a, b, 1 - a - b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ .

Dacă  $m = -2$ , sistemul devine:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

Un minor principal al matricei sistemului este, de exemplu:

$$\Delta_{pp} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Ecuațiile (1) și (2) sunt ecuații principale, ecuația (3) este ecuație secundară. Calculăm determinantul caracteristic corespunzător acestei ecuații

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Conform teoremei lui Rouché, sistemul este incompatibil.

## 2.2 Algebră 2

a) Calculăm

$$(x-2)(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=xy-2x-2y+6=x*y.$$

$G$  este parte stabilă față de operația  $*$ , dacă

$$x > 2, y > 2 \implies x * y > 2.$$

Observăm că:

$$x > 2, y > 2 \implies (x-2) > 0, (y-2) > 0 \implies (x-2)(y-2) > 0 \implies x * y > 2.$$

Deci  $G$  este parte stabilă față de operația  $*$ .

b)  $G$  este grup comutativ față de operația algebrică  $*$  dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- *lege internă*: am demonstrat deja această proprietate la punctul a).

- *asociativitate*: pentru orice  $x, y, z \in G$ , avem

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Calculăm

$$(x * y) * z = ((x-2)(y-2)+2) * z = (x-2)(y-2)(z-2)+2;$$

$$x * (y * z) = x * ((y-2)(z-2)+2) = (x-2)(y-2)(z-2)+2.$$

Deci legea  $*$  este asociativă.

- *comutativitate*: pentru orice  $x, y \in G$ , avem  $x * y = y * x$ . Dar

$$x * y = (x-2)(y-2)+2 = (y-2)(x-2)+2 = y * x$$

(am folosit comutativitatea înmulțirii numerelor reale). Deci  $*$  este comutativă.

- *element neutru*: există  $e \in G$  astfel ca, pentru orice  $x \in G$  să avem:  $x * e = x$  (am folosit comutativitatea). Avem:

$$\begin{aligned} \forall x > 2 : (x-2)(e-2)+2 &= x \\ \Rightarrow \forall x > 2 : (x-2)(e-2) - (x-2) &= 0 \\ \Rightarrow \forall x > 2 : (x-2)(e-3) &= 0 \\ \Rightarrow e &= 3. \end{aligned}$$

Deoarece  $3 \in G$ , deducem că 3 este element neutru pentru operația  $*$  în  $G$ .

- *elemente simetrizabile*: pentru orice  $x \in G$ , există  $x' \in G$  astfel ca  $x * x' = e$ . Rezolvăm ecuația:

$$(x - 2)(x' - 2) + 2 = 3,$$

$$x \neq 2 \implies x' = \frac{1}{x - 2} + 2;$$

$$x > 2 \implies \frac{1}{x - 2} > 0 \implies \frac{1}{x - 2} + 2 > 2 \implies x' \in G.$$

Deci orice element din  $G$  este simetrizabil în  $G$ .

Am demonstrat că  $(G, *)$  este un grup comutativ.

c) Funcția  $f$  definește un izomorfism între grupurile  $(G, *)$  și  $((0, \infty), \cdot)$  dacă  $f$  este funcție bijectivă și dacă

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G.$$

$f$  este injectivă deoarece

$$\forall x_1, x_2 \in G : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 - 2 = x_2 - 2 \implies x_1 = x_2.$$

$f$  este surjectivă deoarece

$$\forall y \in (0; \infty), \exists x = y + 2 \in G \text{ astfel ca } y = f(x).$$

Calculăm:

$$f(x * y) = f((x - 2)(y - 2) + 2) = (x - 2)(y - 2) = f(x) \cdot f(y).$$

Deci  $f$  este izomorfism de grupuri.

## 2.3 Analiză 1

a) Pentru  $n \geq 1$ , calculăm

$$x_{n+1} - x_n = (2 + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}) - (2 + (-1)^n \frac{1}{n}) = (-1)^{n+1} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}).$$

Observăm că semnul diferenței  $x_{n+1} - x_n$  depinde de paritatea lui  $n$ : pentru  $n$  par, diferența este negativă, iar pentru  $n$  impar, este pozitivă. Deci șirul  $(x_n)_n$  nu este monoton.

b) Din inegalitățile

$$|x_n| = \left| 2 + (-1)^n \frac{1}{n} \right| \leq 2 + \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = 2 + \frac{1}{n} \leq 3,$$

deducem că șirul  $(x_n)_n$  este mărginit.

c) Folosim criteriul majorării:

$$|x_n - 2| = \left| 2 + (-1)^n \frac{1}{n} - 2 \right| = \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) = 0,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  există și este egală cu 2.

## 2.4 Analiză 2

Funcția  $f$  este continuă și derivabilă pe fiecare din intervalele  $(-\infty; 0)$  și  $(0; \infty)$ , deoarece pe aceste intervale  $f$  coincide cu funcții elementare. Studiem continuitatea lui  $f$  în 0. Calculăm:

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) = 0;$$

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 e^{-x}) = 0;$$

$$f(0) = 0.$$

Deoarece  $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ , funcția  $f$  este continuă în 0.

Studiem derivabilitatea lui  $f$  în 0:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1;$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = 0.$$

Deoarece  $f'_s(0) \neq f'_d(0)$ , funcția  $f$  nu este derivabilă în 0.

b) Deoarece  $f$  este continuă pe  $\mathbf{R}$ , graficul lui  $f$  nu are asimptote verticale.



Pe intervalul  $(-\infty; 0)$ , graficul lui  $f$  este semidreapta de ecuație  $Y = -X$ . Dreapta de ecuație  $Y = -X$  este deci asimptotă oblică la graficul funcției spre  $-\infty$ .

Studiem existența asimptotelor spre  $+\infty$ . Să presupunem că dreapta de ecuație  $Y = mX + n$  este asimptotă la graficul lui  $f$ . Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx),$$

cu condiția ca aceste limite să existe și să fie finite. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

iar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0,$$

deducem că dreapta de ecuație  $Y = 0$  este asimptotă orizontală a graficului lui  $f$  spre  $+\infty$ .

c) Funcția  $f$  nu este funcție pară, funcție impară sau funcție periodică. Calculăm prima derivată a lui  $f$ :

$$f' : (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ (2x - x^2)e^{-x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$$

Ecuația  $f'(x) = 0$  are soluția  $x = 2$ .  $f'(x) < 0$  pe  $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$  și  $f'(x) > 0$  pe  $(0; 2)$ .

Calculăm a doua derivată a lui  $f$ :

$$f'' : (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ (x^2 - 4x + 2)e^{-x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$$

Ecuația  $f''(x) = 0, x > 0$  are soluțiile  $2 - \sqrt{2}$  și  $2 + \sqrt{2}$ .  $f''(x) > 0$  pe  $(0, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty)$  și  $f''(x) < 0$  pe  $(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ .

Tabelul de variație al funcției  $f$  este următorul:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2 - \sqrt{2}$	$2$	$2 + \sqrt{2}$	$\infty$				
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-1 \mid 0$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$\searrow$	$0$
$f''(x)$	$0$	$0$	$0$	$0$	$ $	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$+$

Graficul lui  $f$  este reprezentat în figura 3.

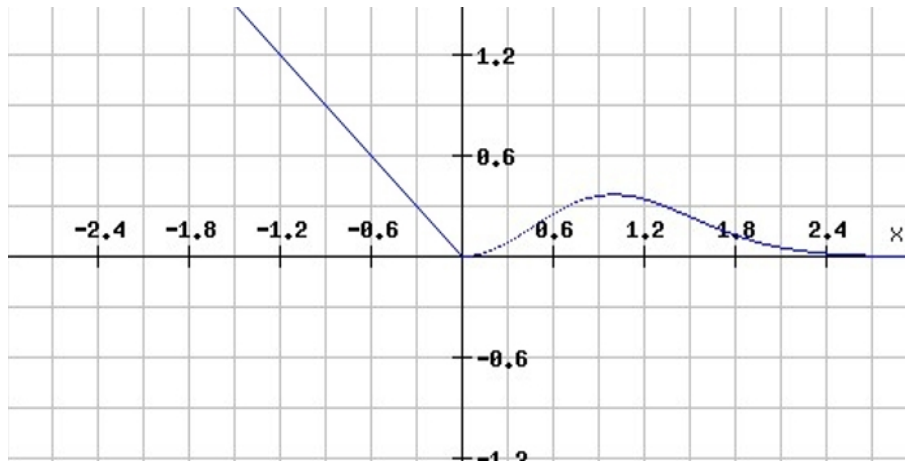


Figura 3

## 2.5 Geometrie 1

a)

$\left. \begin{array}{l} ABCD \text{ paralelogram} \\ AD = BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD = DC \Rightarrow \triangle BDC \text{ este isoscel.}$

Deoarece  $E$  este mijlocul laturii  $DC$ ,  $BM$  este mediană în  $\triangle BDC$ , deci este și înălțime a acestui triunghi. Deci  $BM \perp CD$ .

b), c)

$\left. \begin{array}{l} BM = ME \\ DM = MC \end{array} \right\} \Rightarrow BDEC \text{ este paralelogram} \Rightarrow DE \parallel BC \text{ și } DE = BC.$

Dar  $AD \parallel BC$  și, din axioma paralelelor, deducem că dreptele  $AD$  și  $DE$  coincid. Deci  $A, D, E$  sunt puncte coliniare. Pe de altă parte,  $AD = BC = DE$ , deci  $AD = DE$ .

## 2.6 Geometrie 2

a) Fie  $PE \perp AB, E \in AB$  și  $PF \perp DC, F \in DC$ .

$\left. \begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp PE \\ DC \perp AD \\ DC \perp PF \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} PE \parallel AD \\ PF \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow P, E, F \text{ colineare.}$

Calculăm suma ariilor celor două triunghiuri:

$$\mathcal{A}(PAB) + \mathcal{A}(PCD) = \frac{AB \cdot PE}{2} + \frac{PF \cdot CD}{2} = \frac{AB}{2}(PE + PF) = \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{2}.$$

b) Determinăm mai întâi mulțimea punctelor  $M$  din interiorul pătratului pentru care ariile triunghiurilor  $MAB$  și  $MCD$  sunt proporționale cu numerele 1 și 4, respectiv. Dacă  $M_0$  este un astfel de punct, fie  $M_0E \perp AB, E \in AB$  și  $M_0F \perp CD, F \in CD$ . Condiția din enunț devine:

$$\frac{1}{4} = \frac{\mathcal{A}(M_0AB)}{\mathcal{A}(M_0CD)} = \frac{M_0E}{M_0F}.$$

Folosind proporții derivate, obținem:

$$\frac{M_0E}{M_0E + M_0F} = \frac{1}{1 + 4},$$

deci

$$M_0E = \frac{1}{5}AD.$$

Deducem că mulțimea punctelor  $M$  din interiorul pătratului, pentru care ariile triunghiurilor  $MAB$  și  $MCD$  sunt proporționale cu numerele 1 și 4, este un segment situat pe o paralelă la  $AB$ . Acesta este segmentul  $PQ$ , unde

$$P \in [AD], \frac{PA}{PD} = \frac{1}{4}, \quad Q \in [BC], \frac{QB}{QC} = \frac{1}{4}.$$

Analog, mulțimea punctelor  $N$  din interiorul pătratului, pentru care ariile triunghiurilor  $NBC$  și  $NDA$  sunt proporționale cu 2 și cu 3, respectiv, este segmentul  $RS$ , unde

$$R \in [AB], \frac{RB}{RA} = \frac{2}{3}, \quad S \in [DC], \frac{SC}{SD} = \frac{2}{3}.$$

(vezi Fig. 2)

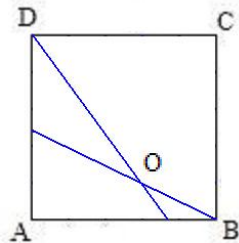


Figura 2

Fie  $\{O\} = PQ \cap RS$ . Vom arăta că acesta este unicul punct care verifică condițiile din enunț. Este clar că  $O$  este interior pătratului. Știm că:

$$O \in PQ \implies \frac{\mathcal{A}(OAB)}{\mathcal{A}(OCD)} = \frac{1}{4};$$

$$O \in RS \implies \frac{\mathcal{A}(OBC)}{\mathcal{A}(ODA)} = \frac{2}{3}.$$

Deoarece

$$\mathcal{A}(OAB) + \mathcal{A}(OCD) = \mathcal{A}(OBC) + \mathcal{A}(ODA) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD),$$

obținem următorul șir de rapoarte egale:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(OAB)}{1} &= \frac{\mathcal{A}(OCD)}{4} = \frac{\mathcal{A}(OAB) + \mathcal{A}(OCD)}{1+4} = \\ &= \frac{\mathcal{A}(OBC) + \mathcal{A}(ODA)}{2+3} = \frac{\mathcal{A}(OBC)}{2} = \frac{\mathcal{A}(ODA)}{3}. \end{aligned}$$

Deducem că ariile triunghiurilor  $OAB, OBC, OCD, ODA$  sunt proporționale respectiv cu 1, 2, 4, 3. Deci punctul  $O$  este punctul căutat.

**I. Algebra** 1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

- Să se arate că  $A^2 = 3A - 2I_2$ , unde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Să se arate că  $A$  este inversabilă și să se calculeze  $A^{-1}$ .
- Să se calculeze  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Să se determine matricele  $X \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $X^2 = A$ .

2. Pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$  considerăm funcția  $f_n : (2, \infty) \rightarrow (2, \infty)$ ,  $f_n(x) = 2 + (x - 2)^{2^n}$ . Să se arate că:
- $f_m \circ f_n = f_{m+n}$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{Z}$ .
  - Mulțimea  $G = \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  împreună cu operația de compunere a funcțiilor este grup comutativ.
  - Grupul  $(G, \circ)$  este izomorf cu grupul aditiv  $(\mathbb{Z}, +)$  al numerelor întregi.

**II. Analiza** 1. Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- Să se calculeze  $f'$ .
- Să se afle maximumul funcției  $f$ .
- Să se studieze monotonia șirului  $(x_n)_{n \geq 3}$ ,  $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ .

2. Se consideră funcția  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ \sin x, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

- Să se studieze continuitatea funcției  $g$ .
- Să se studieze derivabilitatea funcției  $g$ .
- Să se arate că funcția  $g$  admite primitive, să se afle o primitivă a ei și să se calculeze  $\int_{-1}^1 g(x) dx$ .

**III. Geometrie** 1. Fie  $\mathcal{C}(O, R)$  un cerc fixat de centru  $O$  și rază  $R$  și două cercuri variabile  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ , tangente exterior între ele și ambele tangente interior cercului fixat.

Să se arate că triunghiul  $OO_1O_2$  are perimetru constant.

2. În planul  $xOy$ , se consideră ecuația  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ .

- Să se arate că această ecuație reprezintă un cerc căruia să i se determine raza și coordonatele centrului.
- Să se arate că dreapta de ecuație  $12x - 5y + 19 = 0$  este tangentă la cerc și să se determine coordonatele punctului de tangență.
- Să se scrie ecuațiile laturilor pătratului circumscris cercului, în care una dintre laturi este pe dreapta de la punctul b).

**IV. Informatica** 1. Se numește subsecvență a unui vector  $V$  cu  $n$  elemente întregi un vector cu cel puțin un element și cel mult  $n$  elemente care se găsesc pe poziții consecutive în vectorul  $V$ . Să se scrie un program în *Pascal/C/C++* care citește de la tastatură numărul natural  $n$  și vectorul  $V$  având  $n$  elemente întregi și afișează subsecvența lui  $V$  având suma elementelor maximă.

2. Se citesc de la tastatură numărul natural  $n$  și șirul de numere naturale  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Să se scrie un program în *Pascal/C/C++* care afișează indicii  $i$  și  $j$  care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

- $1 \leq i < j \leq n$ ;
- $a_i > a_k$  și  $a_j > a_k$ , pentru orice  $k$ ,  $i + 1 \leq k \leq j - 1$ ;
- diferența  $j - i$  este maximă.

3. Să se calculeze complexitatea timp a programelor propuse pentru problemele de mai sus. În cazul în care nici una dintre soluțiile propuse nu are complexitatea liniară, să se scrie un program în *Pascal/C/C++* de complexitate timp liniară pentru una din cele doua probleme de mai sus, la alegere.

Precizări: Pentru toate problemele de mai se presupune că datele sunt valide, și  $3 \leq n \leq 1000$ . Se vor descrie informal detaliile implementării oricărui program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a blocurilor de program, a condițiilor.

**Timp de lucru: 3 ore.**

### 3 Domeniul de licență *Informatică*. Subiectele de matematică.

#### 3.1 Algebră

##### 3.1.1 Problema 1

Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .

- a) Să se arate că  $A^2 = 3A - 2I_2$ , unde  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- b) Să se arate că  $A$  este inversabilă și să se calculeze  $A^{-1}$ .
- c) Să se calculeze  $A^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- d) Să se determine matricele  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  astfel încât  $X^2 = A$ .

*Rezolvare*

a) Calculăm:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$
$$3A - 2I_2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deci  $A^2 = 3A - 2I_2$ .

b) Egalitatea anterioară se mai poate scrie:

$$I_2 = A \cdot (1, 5I_2 - 0, 5A) = (1, 5I_2 - 0, 5A) \cdot A.$$

Folosim definiția elementului inversabil, pentru a deduce că  $A$  este inversabilă față de operația de înmulțire a matricelor și că

$$A^{-1} = 1, 5 \cdot I_2 - 0, 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -0, 5 \\ 0 & 0, 5 \end{pmatrix}$$

c) Vom demonstra că  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ , pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$ . Folosim metoda inducției matematice. Fie  $P$  predicatul de mai sus.

*Etapă de verificare.*  $P(1) : A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix}$ , este o propoziție adevărată.

*Etapă de demonstrație.* Arătăm că implicația  $P(n) \rightarrow P(n+1)$  este o propoziție adevărată, pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$\begin{aligned} P(n) : A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(n+1). \end{aligned}$$

Deoarece  $P(1)$  este o propoziție adevărată și din presupunerea că  $P(n)$  este adevărată, rezultă că  $P(n+1)$  este adevărată, deducem că propoziția  $P(n)$  este adevărată pentru orice număr natural  $n$ .

d) Fie  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Matricea  $X$  verifică relația:

$$X^2 - (a + d)X + (\det(X))I_2 = 0_2.$$

Dacă  $X^2 = A$ , atunci  $\det(X^2) = \det(A)$ , deci  $\det(X) = \pm\sqrt{2}$ . Deducem că

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - (a+d)X \pm \sqrt{2}I_2 = 0_2,$$

deci

$$(1) \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{a+d} & \frac{1}{a+d} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{a+d} \end{pmatrix},$$

sau

$$(2) \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{a+d} & \frac{1}{a+d} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{2}}{a+d} \end{pmatrix}.$$

Considerăm cazul (1); identificând  $a = \frac{1+\sqrt{2}}{a+d}$  și  $d = \frac{2-\sqrt{2}}{a+d}$ , obținem imediat, prin adunare, că  $(a+d)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ , deci că  $a+d = \pm(1+\sqrt{2})$ . Obținem următoarele două matrice, soluții ale ecuației date:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} & -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2}+1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Analog, considerând cazul (2), obținem soluțiile:

$$X_3 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} & \frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} & -\frac{1}{1-\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

### 3.1.2 Problema 2

Pentru orice  $n \in \mathbf{Z}$  considerăm funcția  $f_n : (2, \infty) \rightarrow (2, \infty)$ ,  $f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n}$ . Să se arate că:

a)  $f_m \circ f_n = f_{m+n}$  pentru orice  $m, n \in \mathbf{Z}$ .



b) Mulțimea  $G = \{f_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$  împreună cu operația de compunere a funcțiilor este grup comutativ.

c) Grupul  $(G, \circ)$  este izomorf cu grupul aditiv  $(\mathbf{Z}, +)$  al numerelor întregi.

*Rezolvare*

a) Calculăm

$$\begin{aligned} f_m \circ f_n(x) &= f_m(f_n(x)) = 2 + (f_n(x) - 2)^{2^m} = 2 + [2 + (x - 2)^{2^n} - 2]^{2^m} = \\ &= 2 + [(x - 2)^{2^n}]^{2^m} = 2 + (x - 2)^{2^n \cdot 2^m} = 2 + (x - 2)^{2^{n+m}} = f_{n+m}(x). \end{aligned}$$

b) Din relația demonstrată la punctul a), știm că mulțimea  $G$  este parte stabilă față de operația de compunere a funcțiilor. Observăm că:

$$id_{(2, \infty)} = f_0 \in G,$$

$$f_n \circ f_m = f_m \circ f_n, \text{ pentru orice } m, n \in \mathbf{Z},$$

și că

$$f_n \circ f_{-n} = id_{(2, \infty)}, \text{ pentru orice } n \in \mathbf{Z}.$$

Toate aceste relații arată că funcția identică pe  $(2, \infty)$  este element neutru în  $G$  față de operația de compunere a funcțiilor, că operația "o" este comutativă pe  $G$  și că inversul elementului  $f_n$  din  $G$  este elementul  $f_{-n}$  din  $G$ . Deci  $(G, \circ)$  este grup comutativ.

c) Definim aplicația

$$\phi : G \longrightarrow \mathbf{Z}, \quad \phi(f_n) = n.$$

Această aplicație este bijectivă, deoarece este injectivă și surjectivă. Demonstrăm că  $\phi$  este morfism de grupuri:

$$\phi(f_m \circ f_n) = \phi(f_{m+n}) = m + n = \phi(f_m) + \phi(f_n), \text{ pentru orice } m, n \in \mathbf{Z}.$$

Deci  $(G, \circ) \simeq (\mathbf{Z}, +)$ .

Analiză

### 3.1.3 Problema 1

Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

a) Să se calculeze  $f'$ .

b) Să se afle maximumul funcției  $f$ .

c) Să se studieze monotonia șirului  $(x_n)_{n \geq 3}$ ,  $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ .

*Rezolvare*

a) Funcția  $f$  este funcție elementară, deci este derivabilă pe tot domeniul său de definiție. Calculăm:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

b) Pentru a determina punctele de extrem ale funcției  $f$ , studiem semnul funcției derivate:

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \ln(x) > 0 \iff \ln(e) > \ln(x) \iff e > x \geq 1.$$

Deducem că  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[1, e]$  și strict descrescătoare pe intervalul  $[e, \infty)$ , deci  $e$  este punct de maxim global pentru  $f$ . De aceea, valoarea maximă a funcției este:

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

c) Exprimăm termenii șirului  $(x_n)_{n \geq 3}$  astfel:

$$x_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}}.$$

Deoarece funcția exponențială de bază  $e$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ , iar restricția funcției  $f$  la intervalul  $[3; \infty)$  este strict descrescătoare, deducem că șirul  $(x_n)_{n \geq 3}$  este strict descrescător.

### 3.1.4 Problema 2

Se consideră funcția  $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ \sin x, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea funcției  $g$ .

b) Să se studieze derivabilitatea funcției  $g$ .

c) Să se arate că funcția  $g$  admite primitive, să se afle o primitivă a ei și să se calculeze  $\int_{-1}^1 g(x)dx$

*Rezolvare*

a) Pe intervalele  $[-1, 0)$  și  $(0, 1]$ , funcția  $g$  este continuă, deoarece restricțiile ei la aceste intervale sunt funcții elementare. Vom studia continuitatea lui  $g$  în 0:

$$(3) \quad l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x) = 0;$$

$$(4) \quad l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin(x)) = 0;$$

$$(5) \quad f(0) = 0.$$

Deoarece  $l_s(0) = l_d(0) = g(0)$ , deducem că  $g$  este continuă în punctul 0. Deci funcția  $g$  este continuă pe domeniul ei de definiție.

b) Pe intervalele  $[-1, 0)$  și  $(0, 1]$ , funcția  $g$  este derivabilă, deoarece restricțiile ei la aceste intervale sunt funcții elementare. Studiem derivabilitatea lui  $g$  în 0:

$$(6) \quad g'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{x} = 1;$$

$$(7) \quad g'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Deoarece  $g'_s(0) = g'_d(0)$  și deoarece aceste limite sunt finite, funcția  $g$  este derivabilă în 0. Deci  $g$  este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție.

c) Orice funcție continuă, definită pe un interval, admite primitive. Cum  $g$  este continuă, deducem că  $g$  admite primitive pe  $[-1, 1]$ . O primitivă a funcției  $g$  este de forma:

$$G : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + a, & x \in [-1, 0); \\ b, & x = 0; \\ -\cos(x) + c, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Vom determina constantele  $a, b, c$  astfel ca funcția  $G$  să fie continuă pe  $[-1, 1]$ : folosind consecința Teoremei lui Lagrange, va rezulta că  $G$  este și derivabilă

pe  $[-1, 1]$  și că  $G' = g$ . Este evident că  $G$  este continuă pe  $[-1, 0) \cup (0, 1]$ .  
Calculăm:

$$(8) \quad l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} G(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( \frac{x^2}{2} + a \right) = a;$$

$$(9) \quad l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-\cos(x) + c) = c - 1;$$

$$(10) \quad G(0) = b.$$

Deducem că  $G$  este continuă dacă și numai dacă  $a = b = c - 1$ . Orice primitivă a funcției  $g$  este deci de forma:

$$G : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + a, & x \in [-1, 0); \\ a, & x = 0; \\ -\cos(x) + a + 1, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Fie  $G_0$  primitiva obținută pentru  $a = 0$ ; folosim această primitivă și Teorema Leibniz-Newton pentru a calcula:

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = G_0(1) - G_0(-1) = (-\cos(1) + 1) - \left( \frac{(-1)^2}{2} \right) = -\cos(1) + \frac{1}{2}.$$

## 3.2 Geometrie

### 3.2.1 Problema 1

Fie  $\mathcal{C}(O, R)$  un cerc fixat de centru  $O$  și rază  $R$  și două cercuri variabile  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$  și  $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ , tangente exterior între ele și ambele tangente interior cercului fixat. Să se arate că triunghiul  $OO_1O_2$  are perimetru constant.  
*Rezolvare*

Pentru două cercuri  $\mathcal{C}(A, r_1)$  și  $\mathcal{C}(B, r_2)$  sunt adevărate afirmațiile:

$$\text{cercurile sunt tangente exterior} \iff r_1 + r_2 = AB;$$

$$\text{cercurile sunt tangente interior} \iff |r_1 - r_2| = AB.$$

Ținem cont de ipotezele problemei pentru a calcula perimetrul  $\mathcal{P}$  al triunghiului  $OO_1O_2$ :

$$\mathcal{P}(\triangle OO_1O_2) = OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = (R - R_1) + (R - R_2) + (R_1 + R_2) = 2R.$$

Deci perimetrul triunghiului  $OO_1O_2$  este constant, deoarece cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  este fixat.

### 3.2.2 Problema 2

In planul  $xOy$ , se consideră ecuația  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ .

- a) Să se arate că această ecuație reprezintă un cerc căruia să i se determine raza și coordonatele centrului.
- b) Să se arate că dreapta de ecuație  $12x - 5y + 19 = 0$  este tangentă la cerc și să se determine coordonatele punctului de tangență.
- c) Să se scrie ecuațiile laturilor pătratului circumscris cercului, în care una dintre laturi este pe dreapta de la punctul b).

*Rezolvare*

a) Ecuația dată se mai scrie astfel:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5^2.$$

Deducem că ecuația dată este ecuația cercului  $\mathcal{C}(A, 5)$ , unde  $A$  este punctul de coordonate  $(3, -2)$ .

b) Fie  $\Delta$  dreapta dată prin ecuația din enunț. Calculăm distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $\Delta$ :

$$d(A, \Delta) = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) + 19|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{65}{13} = 5.$$

Deoarece  $d(A, \Delta)$  este egală cu raza cercului, dreapta  $\Delta$  este tangentă cercului. Fie  $M$  punctul de tangență; deoarece  $AM \perp \Delta$ , ecuația dreptei  $AM$  este:

$$5(x - 3) + 12(y + 2) = 0.$$

Coordonatele punctului  $M$  verifică sistemul:

$$\begin{cases} 12x - 5y + 19 = 0 \\ 5(x - 3) + 12(y + 2) = 0. \end{cases}$$

Obținem  $M(-\frac{21}{13}, -\frac{1}{13})$ .

c) Dreptele-suport ale laturilor pătratului dat în enunț au următoarea proprietate: una dintre drepte este  $\Delta$ , o altă dreaptă (notată  $\Delta_1$ ) este paralelă

cu  $\Delta$ , iar celelalte două drepte (notate  $d_1$  și  $d_2$ ) sunt perpendiculare pe  $\Delta$ . De aceea, ecuațiile acestor drepte sunt de forma:

$$(11) \quad \Delta_1 : 12x - 5y = a,$$

$$(12) \quad d_1 : 5x + 12y = b,$$

$$(13) \quad d_2 : 5x + 12y = c,$$

unde  $a, b, c$  sunt trei numere reale, ce urmează a fi determinate din sistemul de ecuații:

$$d(A, \Delta_1) = d(A, d_1) = d(A, d_2) = 5.$$

(Această condiție este echivalentă cu proprietatea de tangență a dreptelor la  $\mathcal{C}(A, 5)$ .) Calculăm:

$$d(A, \Delta_1) = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) - a|}{13} = 5 \Rightarrow a = 111.$$

(Soluția  $a = -19$  a ecuației de mai sus corespunde dreptei  $\Delta$ .) Analog, exprimând  $d(A, d_1)$  și  $d(A, d_2)$  în funcție de  $b$  și  $c$ , obținem  $b = 56$  și  $c = -74$  (sau invers). Deci ecuațiile dreptelor cerute în problemă sunt:

$$(14) \quad 12x - 5y + 19 = 0;$$

$$(15) \quad 12x - 5y - 111 = 0;$$

$$(16) \quad 5x + 12y - 56 = 0;$$

$$(17) \quad 5x + 12y + 74 = 0.$$

## 4 Domeniul de licență *Informatică*. Subiectele de informatică.

### 4.1 Subiectul 1.

O primă soluție constă în calculul sumei elementelor subsecvenței vectorului  $V$  ce începe pe poziția  $i$  și se termină pe poziția  $j$  pentru toate valorile  $1 \leq i < j \leq n$ . La fiecare moment se memorează suma maximă și perechea  $(i, j)$  pentru care se realizează această sumă. Acest algoritm necesită un timp pătratic.

Vom prezenta o soluție care necesită un timp liniar. Dacă vectorul nu conține elemente pozitive, atunci subsecvența căutată este formată din cel

mai mare element al vectorului. Altfel, convenim ca suma subsecvenței vide să fie 0. Vom parcurge vectorul o singură dată. Să presupunem că ne aflăm la poziția  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , în vector. La fiecare poziție se memorează subsecvența de sumă maximă găsită până atunci (despre care presupunem că se află între pozițiile  $i_m$  și  $j_m$  în vector și are suma  $Gm$ ) și sufixul de sumă maximă (adică subsecvența de sumă maximă care se termină pe poziția  $k$ , începe pe poziția  $t_m$ , și are suma  $Sm$ ). Inițial, pentru  $k = 1$ , dacă  $V[1] \geq 0$ , cele două subsecvențe memorate vor fi ambele egale cu  $V[1]$ , vor începe și se vor termina pe poziția 1 (adică  $i_m = j_m = t_m = 1$ ); dacă  $V[1] \leq 0$ , vom avea  $Gm = V[1]$ ,  $i_m = j_m = 1$ , și  $Sm = 0$ ,  $t_m = 2$ . Pentru actualizarea lor, la parcurgerea elementului  $V[k + 1]$  din vector, se procedează astfel:

```

if  $Gm < Sm + V[k + 1]$ 
  then
     $Sm := Sm + V[k + 1]$ ;
     $Gm := Sm, i_m = t_m, j_m = k + 1$ ;
  else
    if  $Sm + V[k + 1] > 0$ 
      then
         $Sm := Sm + V[k + 1]$ ;
      else
         $Sm = 0, t_m := k + 2$ ;
    endif
  endif
endif.

```

Complexitatea timp a acestei soluții este liniară deoarece vectorul este parcurs o singură dată, și pentru fiecare element din vector se face doar un număr constant de operații.

## 4.2 Subiectul 2.

O primă soluție constă în verificarea, pentru toate valorile  $1 \leq i < j \leq n$  dacă subsecvența  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  verifică condițiile a), b), c) din enunț. Se memorează numerele  $i$  și  $j$  pentru care sunt verificate aceste condiții și pentru care  $j - i$  este maxim. Acest algoritm necesită un timp cubic.

În continuare vom prezenta un algoritm liniar pentru rezolvarea problemei. Acest algoritm are la bază alocarea dinamică a memoriei, folosindu-se două stive  $Q_1$  și  $Q_2$ . În algoritmul de rezolvare al problemei vom folosi aceste stive astfel:

- La orice moment al calculului, stiva  $Q_1$  verifică următoarea proprietate: două elemente consecutive  $i$  și  $j$  din stivă ( $i$  fiind situat imediat sub  $j$  în stivă) verifică proprietatea:  $i < j$ ,  $a_i \geq a_j$ , și oricare ar fi  $k$ , astfel încât  $i \leq k \leq j$ , avem  $a_i > a_k$  și  $a_j > a_k$ . Evident, stiva  $Q_1$ , parcursă de la bază către top, va fi un șir ordonat descrescător.
- La orice moment al calculului, stiva  $Q_2$  verifică următoarea proprietate: două elemente consecutive  $i$  și  $j$  din stivă ( $i$  fiind situat imediat sub  $j$  în stivă) verifică proprietatea:  $i > j$ ,  $a_i \geq a_j$ , și oricare ar fi  $k$ , astfel încât  $i \leq k \leq j$ , avem  $a_i > a_k$  și  $a_j > a_k$ . Evident, stiva  $Q_2$ , parcursă de la bază către top, va fi un șir ordonat descrescător.

Modul în care se calculează aceste stive este următorul:

- Mai întâi se va completa stiva  $Q_1$ ; sunt parcurse pe rând elementele șirului  $a_1, \dots, a_n$ :
  - pentru fiecare  $k \leq n$  se vor șterge din stivă toate numerele mai mici decât  $a_k$  din stivă, și, apoi,  $a_k$  va fi inserat în topul stivei.
- Apoi se va completa stiva  $Q_2$ ; sunt parcurse pe rând elementele șirului, în ordine inversă,  $a_n, \dots, a_1$ :
  - pentru fiecare  $k \leq n$  se vor șterge din stivă toate numerele mai mici decât  $a_k$  din stivă, și, apoi,  $a_k$  va fi inserat în topul stivei.

Este ușor de observat că o pereche  $(i, j)$  cu  $i < j$  este soluție pentru problemă dacă și numai dacă  $i$  și  $j$  se vor regăsi pe poziții consecutive în stiva  $Q_1$  ( $i$  sub  $j$ , dacă  $a_i \geq a_j$ ), sau  $j$  și  $i$  se vor regăsi pe poziții consecutive în lista  $Q_2$  ( $j$  sub  $i$ , dacă  $a_i \leq a_j$ ).

Pentru a găsi soluția nu ne rămâne decât să parcurgem de la bază către top stivele  $Q_1$  și  $Q_2$  în căutarea unei perechi de elemente consecutive din aceste stive  $i$  și  $j$ , astfel încât modulul diferenței lor  $|i - j|$  să fie maxim. Odata găsită o astfel de pereche, soluția problemei va fi dată de perechea de numere  $(\min(i, j), \max(i, j))$ .

Complexitatea algoritmului este liniară deoarece calculul celor două stive se face în timp liniar (fiecare element este introdus o dată în fiecare stivă, și apoi este șters din fiecare stivă cel mult o dată) și căutarea soluției presupune parcurgerea elementelor celor două stive, ce poate fi executată în timp liniar  $\mathcal{O}(n)$ .



## 5 Domeniul de licență *Matematică*. Subiectul de Informatică.

Vom presupune că vectorul din enunțul problemei este notat cu  $V$ , și are  $n$  elemente. Soluția problemei depinde de varianta de memorare a vectorului.

În varianta de alocare statică de memorie se poate utiliza un vector caracteristic  $c$  definit astfel:  $c_i = 1$ , dacă elementul de pe poziția  $i$  a fost vizitat și  $c_i = 0$ , dacă elementul de pe poziția  $i$  nu a fost vizitat încă. Dacă ne aflăm pe poziția  $t$  din vector, afișăm  $V[t]$ , și vom parcurge vectorul pornind de la această poziție, cum este descris în enunțul problemei, numărând câte poziții ce au asociat în vectorul  $c$  valoarea 0 am întâlnit, până când acest număr ajunge egal cu  $V[t]$ . Algoritmul se oprește când ajungem la o poziție ce conține valoarea 0 în vector, sau când nu mai exista elemente nevizitate.

Varianta de alocare dinamică presupune stocarea elementelor vectorului sub forma unei liste circulare. În acest caz, elementele vizitate vor fi sterse din listă după ce au fost afișate. Algoritmul se oprește când ajungem la o poziție ce conține valoarea 0 în listă, sau când lista este vidă. Remarcăm faptul că în acest caz parcurgerea vectorului se va face fără memorie suplimentară.